❄ Chapitre 16 ❄

Probabilités

Objectif du chapitre :

- Connaître et utiliser le vocabulaire univers, expérience aléatoire, événement, éventualité et issues.
- Comprendre et interpréter un événement contraire, une intersection ou réunion d'événements.
- Reconnaître et utiliser une situation d'équiprobabilité.
- Calculer des probabilités à l'aide d'une distribution de fréquences, d'un arbre des possibles ou d'un tableau.

I. Vocabulaire des événements

Définition 1:

Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**.

Exemple 1:

- Lancer un dé à six faces : « obtenir un 2 » est une éventualité de cette expérience aléatoire,
- Tirage des six numéros gagnants du Loto : « obtenir la combinaison « $2-5-17-23-36-41$ » est une éventualité de cette expérience aléatoire.

Définition 2:

L'ensemble formé par les éventualités est appelé **univers**, il est très souvent noté Ω.

Exemple 2:

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{pile}; \text{face}\}$,
- lancer un dé à six faces : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définition 3:

- Un **événement** de l'expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers,
- Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un **événement élémentaire**.

Exemple 3:

- A = « obtenir un 5 » est un événement élémentaire que l'on peut noter $A = \{5\}$,
- B = « obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter $B = \{2 ; 4 ; 6\}$.

Définition 4:

- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'**événement impossible**, noté $\varnothing$,
- l'événement composé de toutes les éventualités est appelé **événement certain**.

Exemple 4:

- Tirage des six numéros gagnants du loto : « obtenir la combinaison $3-25-38-59-67-91$ » est un événement impossible (les numéros vont de 1 à 49),
- Lancer d'un dé à six faces : « obtenir un nombre positif » est un événement certain.

Définition 5:

Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé **événement contraire** (ou complémentaire) de A, qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple 5:

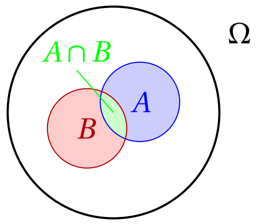
- Lancer d'une pièce de monnaie : si $A = \{ \text{pile} \}$ alors son événement contraire est $\overline{A} = \{ \text{face} \}$,
- Lancer d'un dé à six faces : si A est l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 », alors son événement contraire $\overline{A}$ est l'événement « obtenir 5 ou 6 ».

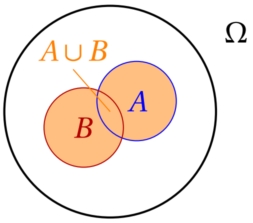
II. Intersection et réunion d'événements

Définition 6:

Soit A et B deux événements de Ω.

Intersection d'événements : l'événement constitué des éventualités appartenant à A et à B est noté $A \cap B$ (se lit « A inter B » ou « A et B »)





Réunion d'événements : l'événement constitué des éventualités appartenant à A ou à B est noté $A \cup B$ (se lit A et de B ou « A union B » ou « A ou B »).

Remarque :

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont **disjoints** ou **incompatibles**.

Exemple 6:

On considère un jeu de 52 cartes. On note A l'événement « obtenir une carte paire » et B l'événement « obtenir une carte de valeur inférieure strictement à six ».

$A \cap B =$ « obtenir une carte paire et inférieures strictement à six » : $A \cap B = \{ 2 ; 4 \}$,

$A \cup B =$ « obtenir une carte paire ou inférieure strictement à six » : $A \cup B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 \}$.

III. Calcul de probabilités

Définition 7:

La **probabilité** d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Exemple 7:

On lance un dé non pipé à six faces. La probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à la probabilité d'obtenir un 2 plus la probabilité d'obtenir un 4 plus la probabilité d'obtenir un 6 :

$$P(2;4;6) = P(2) + P(4) + P(6)$$

Définition 8:

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité,

Remarque :

Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :

- on lance un dé **non pipé**,
- dans une urne, il y a des boules **indiscernables** au toucher,
- on rencontre au **hasard** une personne parmi ...

Propriété 1 :

Dans une situation d'équiprobabilité, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exemple 8:

On lance un dé équilibré à six faces.
On considère les événements A : « obtenir un chiffre pair » et l'événement B : « obtenir un diviseur de six ».

Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité,

$A = \{2\,;4\,;6\}$ donc, $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{1\,;2\,;3\,;6\}$ donc, $P(B) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } B}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Propriété 2 :

Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple 9:

On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.
A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 » et B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 ».

$P(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0,7.$

$P(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$

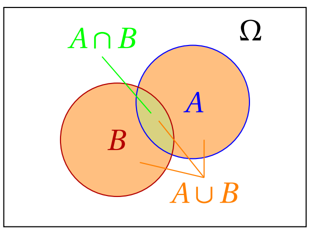
$P(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0,15.$

$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20}.$

IV. Représentation des événements

Diagramme de Venn ou « patates »

Représentation graphique de l'intersection et de la réunion d'événements :
Soit A et B deux parties (ou sous populations) d'une population E.



Tableaux

On jette deux dés à quatre faces (tétraèdre régulier) et on calcule le produit obtenu :

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Arbres

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite, on peut schématiser cette expérience par un arbre :