❉ Chapitre 10 ❉

Repérage dans le plan

I. Repère

Il existe tous types de manières de se repérer dans un plan. Cependant, en mathématiques, et plus particulièrement dans ce chapitre, nous utiliserons le plus souvent un **repère orthonormé**.

Définition 1:
Un triangle OIJ rectangle isocèle en O forme un **repère orthonormé** du plan $(O; I; J)$ dans lequel :

- O est appelé **origine** du repère,
- la droite (OI) est appelée **axe des abscisses**,
- la droite (OJ) appelée **axe des ordonnées**.

Propriété 1 :
On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$. Chaque point M du plan est repéré par un couple de nombres $M(x; y)$ appelé coordonnées du point. x est l'**abscisse** du point et y est l'**ordonnée**.

II. Calculs dans un repère du plan

1. Coordonnées ponctuelles

Propriété 2 :
Dans un repère quelconque $(O; I; J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$, et $B(x_B; y_B)$.
Si le point $I(x_I; y_I)$ est le milieu du segment $[AB]$ alors :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemple 1:
Dans le repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(-3; -2)$, $B(1; -1)$, $C(4; 4)$ et $D(0; 3)$.
Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Soit $I(x_I; y_I)$ est le milieu du segment $[AC]$.
On a donc :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_I = \frac{-3+4}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{-2+4}{2}$$

$$x_I = 0,5 \quad \text{et} \quad y_I = 1$$

$$I = (0,5; 1)$$

Soit $K(x_K; y_K)$ est le milieu du segment $[BD]$.
On a donc :

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$x_K = \frac{1+0}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{-1+3}{2}$$

$$x_K = 0,5 \quad \text{et} \quad y_K = 1$$

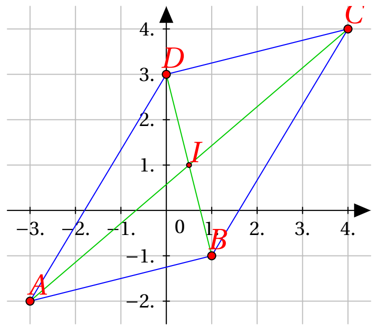
$$K = (0,5; 1)$$

Le point I et le point K sont confondus donc $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
Le quadrilatère $ABCD$ possède des diagonales qui se coupent en leur milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Propriété 3 :
Dans le repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$, et $B(x_B; y_B)$.
La distance de A à B (ou longueur du segment AB) est donné par la formule :

$$d(A; B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple 2:



Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère toujours les points $A(-3;-2)$, $B(1;-1)$, $C(4;4)$ et $D(0;3)$. Quelle est la nature du triangle ABD?

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$,

$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$,

$DB = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$,

$AB = DB$ donc : ABD **est donc un triangle isocèle en** B

$AD^2 = AB^2 + BD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore : ABD **est donc un triangle rectangle isocèle en** B

2. Coordonnées vectorielles

Propriété 4 : *Coordonnées d'un vecteur*

Dans le repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Exemple 3:

Dans le repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(-3;-2)$, $B(1;-1)$, $C(4;4)$ et $D(0;3)$.
Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

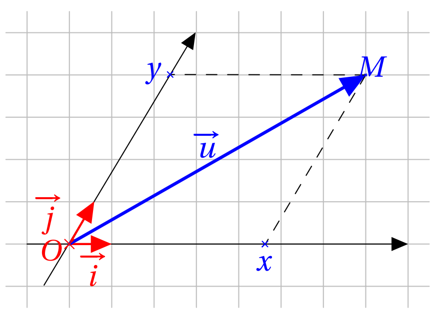
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Propriété 5 :

Dans le repère $(O; I; J)$, les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées de M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

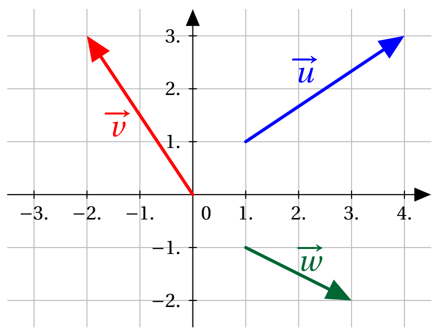
Remarque :

Bien souvent, on note $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ le repère $(O; I; J)$.
Un repère peut ne pas être orthonormé, mais quelconque comme dans l'illustration ci-dessous.



Exemple 4:

Lire les coordonnées des vecteurs de la figure ci-dessous :



Propriété 6 : *Égalité et somme de deux vecteurs*

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k un réel

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
- Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$