❉ Chapitre 10 ❉

Équations

I. "Résolution graphique" d'une équation

Il ne s'agit pas réellement de résolution. La lecture graphique n'offrant que des valeurs approchées, il s'agit en fait d'un outil de conjecture.

1. Équation de la forme $f(x) = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

Propriété 1 :

Soient f une fonction de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et k un nombre réel.
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

Méthode 1 :

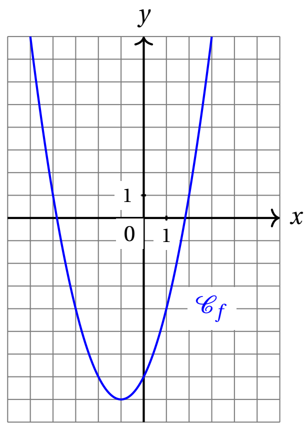
Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2+2x-7=3$ nous introduisons la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+2x-7 \end{array}$$

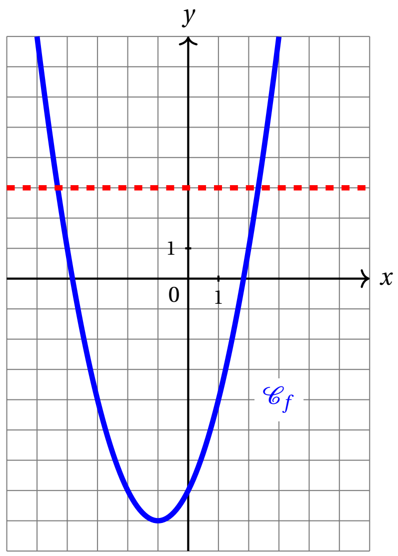
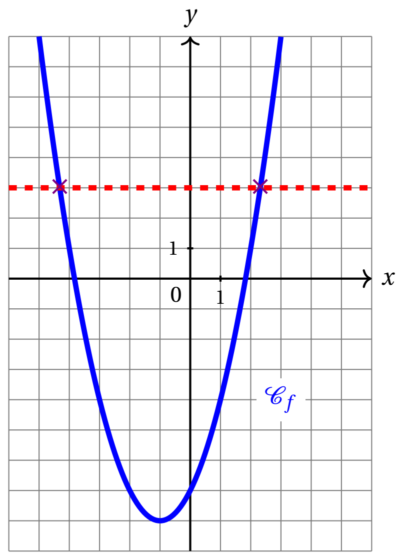
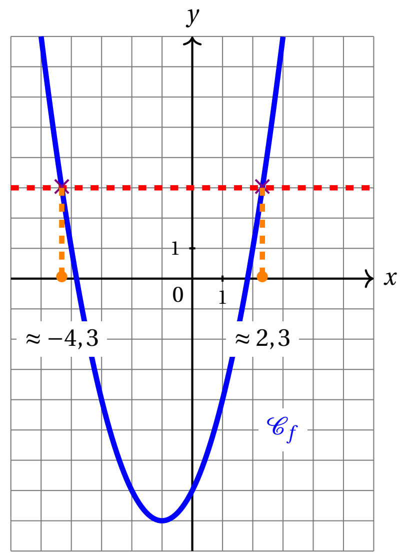
puis traçons sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ avec un logiciel ou une calculatrice.

Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f.

Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.



Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points d'intersections.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2+2x-7=3$ est $\{-4,3\ ;\ 2,3\}$.

Remarque :

- Comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématiques)
- Il s'agit d'une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu'il en est pour le reste de la courbe.

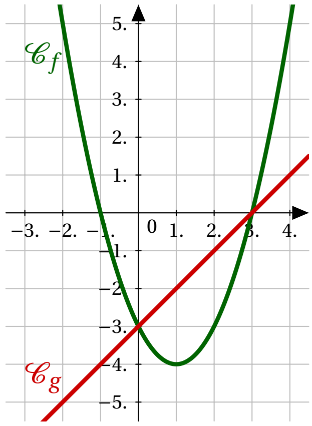
2. Équation de la forme $f(x) = g(x)$

Propriété 2 :

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple 1:

On considère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g tracé ci-contre.
On souhaiterait déterminer les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.



On réutilise la méthode précédente :

1. On identifie les points d'intersections entre les deux courbes.

$$A(0;-3) \qquad \text{et} \qquad B(3;0)$$

2. On lit les abscisses des points d'intersections

$$x_A = 0 \qquad \text{et} \qquad x_B = 3$$

3. On donne les solutions :

$$\mathscr{S} = \{0;3\}$$

II. Résolution algébrique d'une équation

1. Généralités sur les équations

Une équation est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des variables) qui représentent des nombres (expression littérale).
Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.
Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations. Nous apprendrons certaines de ces méthodes.
Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

Propriété 3 :

On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant, en soustrayant, en multipliant, ou en divisant par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Remarque :

- Attention lorsque vous divisez, de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
- On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
- Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
- Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.

2. Équation polynomiale de degré 1

Définition 1:

Une équation polynomiale de degré 1 (ou équation linéaire) est une équation de la forme

$$ax+b=0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Méthode 2 :

1. Pour identifier l'équation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'égalité. Autrement dit il faut se ramener à une égalité à 0.
2. La résolution des équations du premier degré consiste à « isoler le x ».
   Supposons que a n'est pas nul.

$$ax+b=0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} ax+b-b &= 0-b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a}, \text{ car } a\neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $ax+b=0$ est $\mathscr{S}=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple 2:

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E: 2x-13=-3x+2$.

1. On se ramène à un égalité à 0 :

$$\begin{aligned} 2x-13 &= -3x+2 \\ 2x-13+3x-2 &= -3x+2+3x-2 \\ 5x-15 &= 0 \end{aligned}$$

2. On « isole le x »;

$$\begin{aligned} 5x-15 &= 0 \\ 5x-15+15 &= 0+15 \\ 5x &= 15 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{15}{5}, \text{ car } 5\neq 0 \\ x &= \frac{15}{5} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $2x-13=-3x+2$ est : $\mathscr{S}=\{3\}$.