❄ Chapitre 19 ❄

Équations et Inéquations 2

I. Équation produit

Lorsque l'on a affaire à un produit de plusieurs facteurs qui doit être égal à 0, on utilise le théorème suivant :

Propriété 1 :
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Autrement dit :

$$f(x) \times g(x) = 0 \iff f(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = 0.$$

Méthode 1 : *Résoudre une équation à produit nul*
Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(-2x+1)(3x-6) = 0$, la méthode est la suivante :

1. On vérifie que c'est bien une équation produit et que l'on est égal à zéro.
2. On applique la propriété ci-dessus, donc :

$$-2x+1=0 \quad \text{et} \quad 3x-6=0$$

3. On résout les deux équations obtenues précédemment :

$$-2x+1=0 \quad \text{et} \quad 3x-6=0 \iff -2x=-1 \quad \text{et} \quad 3x=6 \iff x=\frac{-1}{-2} \quad \text{et} \quad x=2$$

4. On conclut :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2};2\right\}$$

Exemple 1:
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)(2x+4)-(x-7)(x+1) = 0$

$$\begin{aligned}
(x+1)(2x+4)-(x-7)(x+1)=0 &\iff (x+1)[(2x+4)-(x-7)] = 0\\
&\iff (x+1)(x+11) = 0\\
&\iff x+1=0 \quad \text{et} \quad x+11=0\\
&\iff x=-1 \quad \text{et} \quad x=-11\\
&\iff \mathscr{S} = \{-11;-1\}.
\end{aligned}$$

Propriété 2 :
Soit a un nombre réel. L'équation $x^2 = a$ possède :

- deux solutions si $a > 0$: $\mathscr{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$,
- une solution si $a = 0$: $\mathscr{S} = \{0\}$,
- aucune solution si $a > 0$: $\mathscr{S} = \varnothing$.

Démonstration : Cas $a > 0$

$$\begin{aligned}
x^2 = a &\iff x^2 - a = 0 \iff x^2-(\sqrt{a})^2 = 0\\
&\iff (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0\\
&\iff x-\sqrt{a}=0 \quad \text{et} \quad x+\sqrt{a}=0\\
&\iff x=\sqrt{a} \quad \text{et} \quad x=-\sqrt{a}
\end{aligned}$$

■

II. Équation quotient

Propriété 3 :

L'équation $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ est équivalente à $g(x) \neq 0$ et $f(x) = 0$.

Méthode 2 : *Résoudre une inéquation à quotient nul*

Pour résoudre l'équation $\dfrac{(x-2)(2x-3)}{-x-1} = 0$, la méthode est la suivante :

1. On détermine la valeur qui annule le dénominateur. Comme on ne doit pas diviser par zéro, cette valeur est ensuite écartée de l'ensemble des solutions, c'est une « valeur interdite »

$$-x-1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1$$

Donc la valeur $x=-1$ ne peut pas être solution de cette équation. C'est une valeur interdite.

2. On applique la propriété ci-dessus, donc :

$$(x-2)\times(2x-3)=0$$

3. On résout l'équation obtenue précédemment :

$$(x-2)\times(2x-3)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-2=0 \quad \text{et} \quad 2x-3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=2 \quad \text{et} \quad x=\frac{3}{2}$$

4. On vérifie que les valeurs obtenues ne sont pas une valeur interdite et on conclut :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2};2\right\}$$

Propriété 4 :

L'équation $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)}{k(x)}$ est équivalente à $g(x) \neq 0$ et $k(x) \neq 0$ et $f(x)\times k(x) = g(x)\times h(x)$.

Méthode 3 : *Résoudre une inéquation quotient*

Pour résoudre l'équation $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x+4}$, la méthode est la suivante :

1. On détermine les « valeurs interdites » :

$$x=0 \quad \text{et} \quad x+4=0$$
$$x=0 \quad \text{et} \quad x=-4$$

Donc les valeurs $x=0$ et $x=-4$ ne peuvent pas être solutions de cette équation.

2. On applique la propriété ci-dessus, donc :

$$(2x+1)\times(x+4) = x\times(2x)$$

3. On résout l'équation obtenue précédemment :

$$2x^2+8x+x+4=2x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 9x+4=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-\frac{4}{9}$$

4. On vérifie que la valeur obtenue n'est pas une valeur interdite et on conclut :

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{4}{9}\right\}$$

III. Tableau de signe de $ax+b$

Suivant le signe du coefficient directeur a, on obtient les tableaux de signes suivants :

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
variations de $ax+b$		↗	0	↗	
signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
variations de $ax+b$		↘	0	↘	
signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

On utilise un **tableau de signes** lorsque l'on veut résoudre une inéquation **produit** ou **quotient**.

IV. Inéquation produit

Méthode 4 : *Résoudre une inéquation à produit nul*

Soit l'inéquation $(2x-4)(-x-5)\leqslant 0$.

1. On vérifie que c'est bien une inéquation produit et que l'on est égale à zéro.
2. On résout l'équation $(2x-4)(-x-5)=0$ (Voir **Méthode 1** : *Résoudre une équation à produit nul*) :

$$\begin{aligned}(2x-4)(-x-5)=0 &\iff 2x-4=0 \quad \text{et} \quad -x-5=0\\ &\iff x=2 \quad \text{et} \quad x=-5\end{aligned}$$

3. On construit le tableau de signes de la façon suivante :

On place en abscisses les solutions des équations précédentes

Dans la première colonne, on met les différents facteurs de l'inéquation

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-4)(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Enfin, on résout l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solution négatives ou nulles

$$\mathscr{S}=]-\infty\,;-5]\cup[2\,;+\infty[.$$

Exemple 2:

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x-1)^2<(2x-1)(x-4)$:

1. . $(2x-1)^2<(2x-1)(x-4) \iff (2x-1)^2-(2x-1)(x-4)<0 \iff (2x-1)[(2x-1)-(x-4)]<0$
   $\iff (2x-1)(x+3)<0$
2. Résolution des équations : $2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$ et $x+3=0 \iff x=-3$
3. construction du tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Conclusion : on cherche les signes « $-$ » dans la dernière ligne d'où : $\mathscr{S}=\left]-3\,;\dfrac{1}{2}\right[$

V. Inéquation quotient

La seule différence avec l'inéquation produit, c'est qu'il faut faire attention à la valeur interdite : la valeur pour laquelle le dénominateur est nul.
Dans le tableau de signes, cela se traduit par une double barre au niveau des valeurs interdites

Méthode 5 : *Résoudre une inéquation à quotient nul*

Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x+4}{x+3} \geqslant 0$, il faut :

1. Vérifier c'est bien une inéquation quotient et que l'on est égale à zéro.
2. Résoudre l'équation $\dfrac{-2x+4}{x+3} = 0$ (Voir **Méthode 4** : *Résoudre une inéquation à quotient nul*) :

$$\frac{-2x+4}{x+3} = 0 \iff -2x+4=0 \quad \text{et} \quad -x+3 \neq 0 \iff x=2 \quad \text{et} \quad x \neq 3$$

3. construire le tableau de signes de la façon suivante :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x+4}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

4. Enfin, résoudre l'inéquation à partir du tableau de signes : on cherche les solutions positives ou nulles

$$\mathscr{S} =]-3\,;2\,].$$

Exemple 3:

Résolvons l'inéquation $\dfrac{2x+3}{x-1} \leqslant \dfrac{4x}{2x-3}$.

1. On commence par transformer l'expression de manière à n'avoir QUE des produits ou des quotient d'un côté, et un zéro de l'autre :

$$\frac{2x+3}{x-1} \leqslant \frac{4x}{2x-3} \iff \frac{2x+3}{x-1} - \frac{4x}{2x-3} \leqslant 0 \iff \frac{(2x+3)(2x-3)-4x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \leqslant 0$$
$$\iff \frac{4x^2-9-4x^2+4x}{(x-1)(2x-3)} \leqslant 0 \iff \frac{4x-9}{(x-1)(2x-3)} \leqslant 0$$

2. Résolution de l'équation :

$$4x-9=0 \iff x=\frac{9}{4} \qquad x-1=0 \iff x=1 \qquad 2x-3=0 \iff x=\frac{3}{2} \qquad 1 \text{ et } \frac{3}{2} \text{ sont des valeurs interdites}$$

3. Construction du tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$4x-9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4x-9}{(x-1)(2x-3)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4. Conclusion, on cherche les solutions négatives ou nulles : $\mathscr{S} =]-\infty\,;1\,[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{9}{4}\right[$.