❄ Chapitre 16 ❄

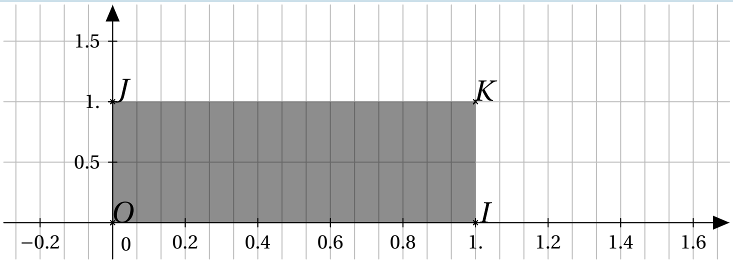
Calcul intégral

I. Aspect graphique

1. Unité d'aire

Définition 1:

Dans un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, on appelle unité d'aire (notée $u.a.$) l'aire du rectangle $OIKJ$.

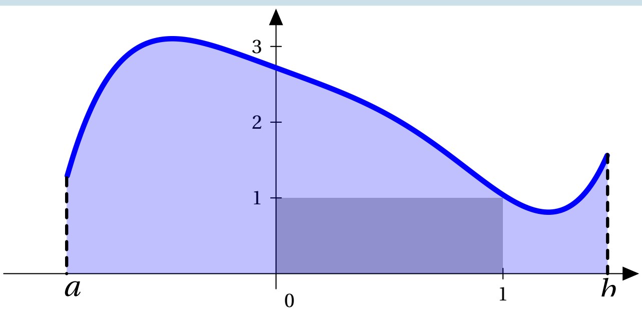


2. Notion d'intégrale : cas d'une fonction continue et positive

En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIV^e siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord »de la surface à la surface entière (intégrale). Au milieu du XIX^e siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe

Définition 2:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 3:

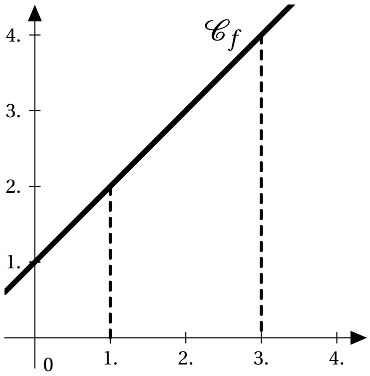
Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de a **à** b **de la fonction** f est l'aire, en unités d'aires, du domaine situé sous sa courbe $\mathbb{C}$.
On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (se lit « intégrale de a à b de f » ou « somme de a à b de f »).

Cette notation est due au mathématicien allemand Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires. Plus tard, un second mathématicien allemand, Bernhard Riemann(1826; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

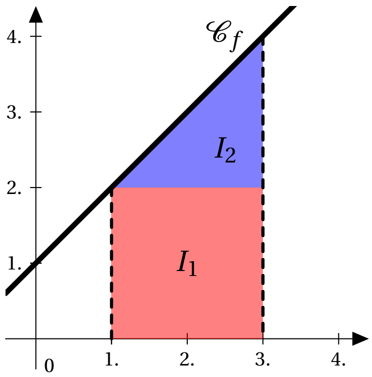
Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = x + 1$

Tracer de la fonction f dans un repère orthogonal, de la zone correspondant à l'ensemble de définition de la fonction.



Découpage de la figure en forme dont on peut calculer l'aire : I_1 et I_2.



Calcul des aires :

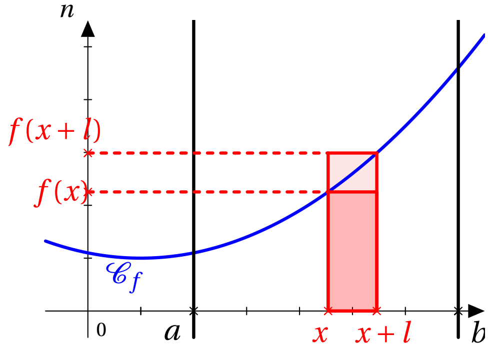
$$\begin{aligned} \int_1^3 x + 1\,\mathrm{d}x &= I_1 + I_2 \\ &= 2 \times 2 + \frac{2 \times 2}{2} \\ &= 6 \text{ unité d'aire} \end{aligned}$$

3. Encadrement de l'intégrale d'une fonction

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a;b]$.
On partage l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \dfrac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $]x; x+l[$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire $l \times f(x+l)$.



Sur l'intervalle $[a;b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".
Voici un algorithme écrit en langage naturel et en langage Python permettant d'obtenir un tel encadrement :

Langage naturel

$L \longleftarrow (b-a)/n$
$x \longleftarrow a$
$m \longleftarrow 0$
$p \longleftarrow 0$
Pour i allant de 0 à $n-1$
    $m \longleftarrow m + L \times f(x)$
    $x \longleftarrow x + L$
    $p \longleftarrow p + L \times f(x)$
Afficher m et p

```python
def integrale(n,a,b):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return("m =",m,"p =",p)
```

Exemple 2:

Avec le logiciel Edupython, on programme l'algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$ (voir ci-dessus).
On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur $[1;2]$.
En augmentant le nombre de sous-intervalles,la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
>>> integrale(10,1,2)
(m = 2.185, p = 2.485)
>>>
```

```
>>> integrale(50,1,2)
(m = 2.3034, p = 2.3634)
>>>
```

```
>>> integrale(100,1,2)
(m = 2.31835,p = 2.34835)
>>>
```

Avec cette méthode, on arrive a déterminer de plus en plus précisément la valeur de $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$

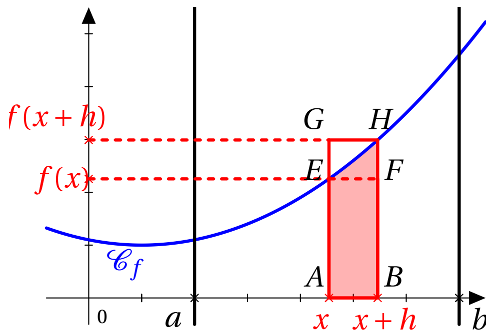
II. Primitives et intégrale

1. Théorème fondamentale

Propriété 1 :
Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Démonstration :
Propriété à démontrer : « Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f. »

Démonstration dans le cas ou f est strictement croissante :



- On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a;b]$ avec $h>0$.
  On veut démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.
  $F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt$.

  On a représenté ci-dessus, la courbe de la fonction f (en bleu).
  Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.
  Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.
  Or, $Aire_{ABFE}=h\times f(x)$ et $Aire_{ABHG}=h\times f(x+h)$.
  Comme f est croissante sur $[a;b]$, on a : $h\times f(x)<F(x+h)-F(x)<h\times f(x+h)$
  Puisque $h>0$, on a : $f(x)<\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}<f(x+h)$.
  Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.
  D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.
- Dans le cas où $h<0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

On en déduit que $F'(x)=f(x)$. ■

2. Calcul d'une intégrale

Propriété 2 :
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

Démonstration :
Propriété à démontrer : « $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ »

La dérivée de la fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction f.
Donc G est une primitive de f sur $[a;b]$.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a;b]$, on a $G(x)=F(x)+k$, $k\in\mathbb{R}$.
De plus, $G(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et $G(a)=F(a)+k$ donc $F(a)=-k$ et donc $k=-F(a)$.
Or $G(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)+k=F(b)-F(a)$. ■

Définition 4:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a;b]$.

On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ la différence $F(b)-F(a)$ noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque :

La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque. Pour une fonction f négative sur $[a;b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(b)-F(a) \quad = \quad -(G(b)-G(a)) \quad = \quad -\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$$

où G est une primitive de la fonction $-f$. Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a;b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a;b]$.

On écrit : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

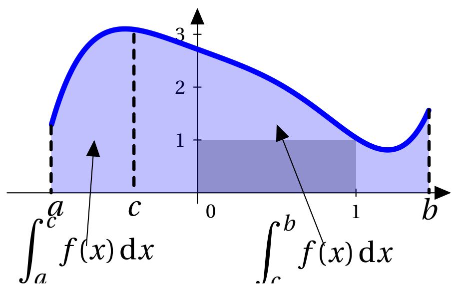
III. Propriétés des intégrales

1. Relation de Chasles

Propriété 3 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, trois réels a, b et c de I, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ »

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$ ■

Exemple 3:

Simplifions l'expression : $A = \int_{-4}^{3} 4x+\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_3^{54} 4x+\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

$A = \int_{-4}^{3} 4x+\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_3^{54} 4x+\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{54} 4x+\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Propriété 4 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I=[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ »

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ ■

2. Linéarité

Propriété 5 :
Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$, α et β deux nombres réels, alors :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :
Propriété à démontrer : « Linéarité de l'intégrale »

On applique les propriétés sur les primitives : kF est une primitive de kf et $F+G$ est une primitive de $f+g$ ■

3. Positivité et ordre

Propriété 6 :

- Si, pour tout $x \in [a;b]$: $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si, pour tout $x \in [a;b]$: $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

- Propriété à démontrer : « Si $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ »

  Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive. ■

- Propriété à démontrer : « Si $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ »

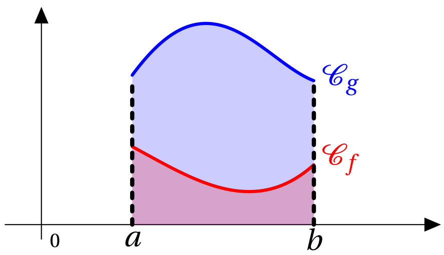
  Si $f(x) \geqslant g(x)$alors $f(x) - g(x) \geqslant 0$. Donc en appliquant la propriété ci dessus, on a : $\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

  Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Exemple 4:

On représente la courbe représentative de la fonction f et de la fonction g, noté $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $[a;b]$.

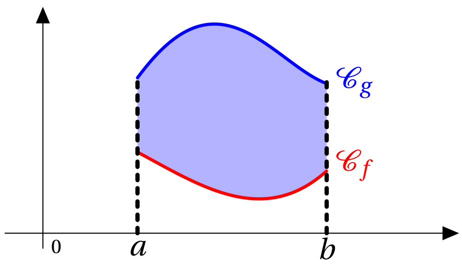
On remarque que sur cet intervalle, $g(x) \geqslant f(x)$ et que l'aire du domaine en rouge $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ est bien plus petit que celui en bleu $\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)$



IV. Aire du domaine compris entre deux courbes

Propriété 7 :
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$, de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a;b]$. Notons $\mathscr{A}$ l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, alors

$$\mathscr{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$



V. Valeur moyenne

Définition 5:

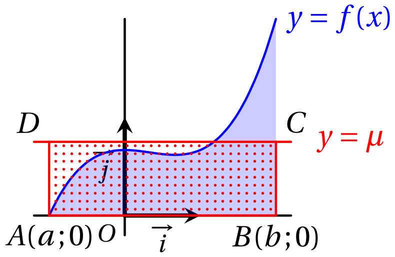
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ $(a<b)$.La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque :

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a;b]$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Exemple 5:

Pour connaître la valeur moyenne μ de $t \mapsto \sin(t)$ sur $[0;\pi]$, on calcule :

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Remarque :

- En mathématiques, si f est une fonction non constante, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur $[a;b]$.
- En physique, si f est une fonction qui représente une intensité variable, la valeur moyenne de f entre deux instants t_1 et t_2 est l'intensité du courant constant transportant la même quantité d'électricité que le courant variable entre t_1 et t_2.

VI. Intégration par partie

Propriété 8 :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : *Exigible en fin de terminale*

Propriété à démontrer : « $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ »

uv est dérivable sur $[a;b]$ et on a : $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions uv', $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a;b]$, donc :

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u'v+uv'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u'(x)v(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ ■

Méthode 1 : *Calculer une intégrale en intégrant par parties*

Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x \qquad B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x \qquad C=\int_1^{\mathrm{e}^2} \ln x\,\mathrm{d}x$$

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$

On pose : $v(x)=x$ donc $v'(x)=1$

$u'(x)=\sin x$ donc $u(x)=-\cos x$

Ce choix n'est pas anodin! L'idée est ici de ne plus laisser de facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer.
Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [-\cos x\times x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\times 1\,\mathrm{d}x \quad = \quad [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+0\cos(0)+[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin 0 \quad = \quad 1\end{aligned}$$

$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

On pose : $v(x)=x^2$ donc $v'(x)=2x$

$u'(x)=\cos x$ donc $u(x)=\sin x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [\sin x\times x^2]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times 2x\,\mathrm{d}x\\ &= [x^2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or, dans le terme de droite, on reconnait l'intégrale A de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une double intégration par parties. On a donc :

$$B=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-0^2\sin 0-2\times 1=\frac{\pi^2}{4}-2$$

$C=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\,\mathrm{d}x$

On pose : $v(x)=\ln x$ donc $v'(x)=\frac{1}{x}$

$u'(x)=1$ donc $u(x)=x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{e}^2} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)]_0^{\mathrm{e}^2}-\int_0^{\mathrm{e}^2} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [x\ln x]_0^{\mathrm{e}^2}-\int_0^{\mathrm{e}^2} x\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^2\ln\left(\mathrm{e}^2\right)-1\ln 1-\int_0^{\mathrm{e}^2} 1\,\mathrm{d}x \quad = \quad \mathrm{e}^2\times 2\ln\mathrm{e}+[x]_0^{\mathrm{e}^2}\\ &= \mathrm{e}^2\times 2-\mathrm{e}^2+1 \quad = \quad \mathrm{e}^2+1\end{aligned}$$