❄ Chapitre 4 ❄

Complément sur la dérivation

I. Nombre dérivé

Définition 1:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

Dire que f est dérivable en a, c'est dire que lorsque h tend vers 0, le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ, ce que l'on note

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

ℓ est appelé le **nombre dérivé de** f **en** a. On le note $f'(a)$.

Définition 2:

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ **au point** A est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Définition 3:

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente en A à $\mathscr{C}_f$ a pour équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

II. Dérivabilité et continuité

Propriété 1 : *Admise*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. Si f est dérivable en a (sur I) alors f est continue en a (sur I).

Remarque :
La réciproque est fausse. Pour s'en convaincre, on pourra considérer la fonction valeur absolue en 0.

III. Fonction dérivée

Définition 4:

Une fonction f est dérivable sur un intervalle D si et seulement si elle est dérivable en tout réel a de D.
Si f est dérivable sur D, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction définie sur D par $f' : a \to f'(a)$.

Propriété 2 :

Fonction f	Domaine de définition	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}/\{0\}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$

IV. Dérivées et opérations

1. Somme de deux fonctions, produit d'une fonction par un réel

Propriété 3 :

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ avec u et v deux fonctions dérivables sur $]a;b[$, alors f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Propriété 4 :

Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un nombre réel et u une fonction dérivable sur $]a;b[$, alors f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = \lambda u'(x)$$

2. Produit, quotient de deux fonctions, inverse d'une fonction

Propriété 5 :

Si $f(x) = u(x)v(x)$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $]a;b[$ alors la fonction f est dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Propriété 6 :

- Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

- Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $]a;b[$ et si $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est une fonction dérivable sur $]a;b[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

3. Composés de deux fonctions

Définition 5:

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, dont l'image est incluse dans un ensemble $J \subset \mathbb{R}$ et soit g une fonction définie sur J.
On appelle fonction composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie pour tout $x \in I$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemple 1:

Soit $f : x \mapsto 2x+3$ et $g : x \mapsto 4x^3$.

$$x \xmapsto{f} f(x) = 2x+3 \xmapsto{g} g(f(x)) = 4(2x+3)^3$$

D'où $g \circ f(x) = 4(2x+3)^3$

$$x \xmapsto{g} g(x) = 4x^3 \xmapsto{f} f(g(x)) = 2(4x^3)+3$$

D'où $f \circ g(x) = 2(4x^3)+3 = 8x^3+3$

Propriété 7 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un ensemble inclus dans un intervalle J. Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle J. Dans ces conditions, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Soit

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = f'(x) \times (g'(f(x)))$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = f'(x) \times (g'(f(x)))$ »

Soit x_0 un réel de l'intervalle de I. On veut montrer que $g \circ f$ est dérivable en x_0 donc que $\dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$$

D'une part, f étant dérivable en x_0, on sait que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ quand x tend vers x_0.
D'autre part, lorsque x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ car f est continue en x_0 (car dérivable sur I). De plus, comme g est dérivable en $f(x_0)$, $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{g(x) - g(x_0)}$ tend vers $g'(f(x)) = (g' \circ f)(x_0)$.
Donc $\dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$ tend vers $f'(x_0) \times (g' \circ f)(x_0)$ pour tout x_0 de I. ■

Remarque :

Pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I, on a :

Fonction	Dérivée	Condition
$x \longmapsto u^n(x)$	$x \longmapsto n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$	
$x \longmapsto \sqrt{u(x)}$	$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$
$x \longmapsto e^{u(x)}$	$x \longmapsto u'(x) \times e^{u(x)}$	

V. Étude de fonction

1. Sens de variation et dérivée

Propriété 8 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- $f'(x) = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.
- $f'(x) > 0$ sur I si et seulement si f est strictement croissante sur I.
- $f'(x) < 0$ sur I si et seulement si f est strictement décroissante sur I.

2. Extremum

Définition 6:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel appartenant à I.

- La fonction f admet un **maximum** sur I, atteint en x_0 signifie que : pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$. $M = f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I.
- La fonction f admet un **minimum** sur I, atteint en x_0 signifie que : pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant f(x_0)$. $m = f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I.
- Dire que $f(x_0)$ est un **extremum** de f signifie que $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum.

Propriété 9 :

Soit f définie et dérivable sur un intervalle I et soit a un élément de I. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.