Chapitre 3

Dénombrement et combinatoire

I. Cardinal d'ensemble

1. Réunion disjointe

Définition 1:
Soit A un ensemble fini. La cardinal de A, noté $\text{Card}(A)$ est le nombre d'élément de l'ensemble A.

Définition 2:
Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Propriété 1 : *Admise*
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A_1, ..., A_n des ensembles finis deux à deux disjoints. On a :

$$\text{Card}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + ... + \text{Card}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_n)$$

2. Produit cartésien

Définition 3:
Soient A et B deux ensembles non vides. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ (se lit « A croix B »), constitué des couples $(x; y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.
Plus formellement, $A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}$.

Exemple 1:
Pour $A = \{u; v\}$ et $B = \{45; 8\}$, on a $A \times B = \{(u; 45); (u; 8); (v; 45); (v; 8)\}$

Propriété 2 :
Soient A et B deux ensembles finis. On a : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

Démonstration :
Propriété à démontrer : « $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ ».

On considère deux ensembles A et B de cardinaux respectifs n et p.

Si A ou B est vide, leur cardinal vaut 0 et le produit $A \times B$ est également vide, de cardinal 0 également. La formule reste valable.

On note $a_1, ..., a_n$ les éléments de A et $b_1, ..., b_p$ les éléments de B. De plus, pour un entier naturel i inférieur ou égal à p, on note A_i l'ensemble $A \times \{b_i\}$.
Les éléments de A_i sont les couples $(a_k; b_i)$ pour k allant de 1 à n. Il y a donc n éléments dans chaque A_i.
Les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. En effet, le deuxième élément d'un couple diffère d'un ensemble A_i à un autre.
L'union des A_i pour i allant de 1 à p est $A \times B$.
Cette union est disjointe, on a $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A_1) + \ldots + \text{Card}(A_p) = n + \ldots + n = np$. ■

Définition 4:
Soient A un ensemble et n un entier naturel non nul. on appelle n-uplet de A un élément de A^n.

Propriété 3 :

Soient A un ensemble fini et n un entier naturel non nul. On a : $\text{Card}(A^n) = \left[\text{Card}(A)\right]^n$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\text{Card}(A^n) = \left[\text{Card}(A)\right]^n$ ».

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{P}_n$ la proposition $\text{Card}(A^n) = \left[\text{Card}(A)\right]^n$.

- **Initialisation** : $\mathscr{P}_1$ est vraie. En effet $A^1 = A$ et $\text{Card}(A) = \left[\text{Card}(A)\right]^1$.
- **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k pour lequel $\mathscr{P}_k$ est vraie.
  On assimile alors A^{k+1} à $A^k \times A$. Cette association se faisant de manière univoque, on a alors $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A)$. Ainsi, $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A) = \text{Card}(A^k) \times \text{Card}(A) = \left[\text{Card}(A)\right]^k \times \text{Card}(A)$ par hypothèse de récurrence.
  Finalement, on a $\text{Card}(A^{k+1}) = \left[\text{Card}(A)\right]^{k+1}$. La proposition $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie $\text{Card}(A^{k+1}) = \left[\text{Card}(A)\right]^{k+1}$.
- **Conclusion** : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a bien $\text{Card}(A^n) = \left[\text{Card}(A)\right]^n$

Exemple 2:

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être constitué de quatre, cinq ou six chiffres allant de 0 à 9, puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres A, B et C. Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Appelons A_4, A_4 et A_4 l'ensemble des mots de passe composées respectivement de 4, 5 et 6 chiffres et d'une lettre. On a :

- $\text{Card}(A_4) = \text{Card}(\{0;...;9\}^4 \times \{A;B;C\}) = 10^4 \times 3 = 30000$
- $\text{Card}(A_5) = \text{Card}(\{0;...;9\}^5 \times \{A;B;C\}) = 10^5 \times 3 = 300000$
- $\text{Card}(A_6) = \text{Card}(\{0;...;9\}^6 \times \{A;B;C\}) = 10^6 \times 3 = 3000000$

Il y a donc $3000000 + 300000 + 30000 = 3330000$ codes possibles.

II. Arrangements et permutations

1. Arrangement d'un ensemble

Définition 5:

Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on appelle **factorielle** n ou **factorielle de** n, l'entier, noté $n!$, égal au produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à n : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
On pose : $0! = 1$

Définition 6:

Soient A un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n. un arrangement de k éléments de A (ou k-arrangement) est un k-uplet d'éléments distinct de A.

Exemple 3:

Si $A = \{1;2;3;4\}$, alors $(1;2;4)$ et $(1;4;2)$ sont des arrangements de trois éléments de A : ce sont deux 3-arrangements de A. Cependant $(1;1;4)$ n'est pas un 3-arrangement.

Propriété 4 :

Soient A un ensemble fini non vide à n éléments de k un entier naturel tel que $k \leqslant n$. Le nombre de k-arrangement de A est égal à :

$$\mathscr{A}_n^k = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\mathscr{A}_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ».

Pour construire un k-uplet d'éléments distincts de A, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ choix pour le second, ..., $n-k+1$ choix pour le k-ième.

Ainsi le nombre de k-arrangements A est égale :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \quad = \quad \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \ldots \times 1}{(n-k) \times \ldots \times 1} \quad = \quad \frac{n!}{(n-k)!}$$

Donc $\mathscr{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. ■

2. Permutations d'un ensemble

Définition 7:

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments. un permutation de A est un n-uplet d'éléments distinct de A.

Exemple 4:

Si $A = \{23;02;87\}$, les permutations de A sont $\{23;02;87\}$, $\{23;87;02\}$, $\{02;23;87\}$, $\{02;87;23\}$, $\{87;02;23\}$ et $\{87;23;02\}$.

Propriété 5 : *Admise*

Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$.

Exemple 5:

Dans une classe de terminale, cinq élèves n'ont pas encore été évalués à l'oral. dans combien d'ordres différents le professeur peut-il interroger, chaque élève n'étant interrogé qu'une fois ? Combien y a-t-il de possibilités s'il n'a le temps d'interroger que trois d'entre eux ?

On assimile l'ordre de passage à un tirage avec ordre et sans remise parmi cinq élèves : on établit donc une permutation de ces cinq élèves. le nombres d'ordres de passage est don : $5! = 120$.

Pour trois élèves, on a un 3-arrangement : $\dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$

III. Combinaisons d'un ensemble fini

1. Parties d'un ensemble fini

Définition 8:

Une partie d'un ensemble A est un sous-ensemble de A.

Exemple 6:

Si $A = \{18;06;20\}$, alors $\{18;06\}$ et $\varnothing$ sont des parties de A.

Propriété 6 :

Soit A un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de A est égal à 2^n.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Le nombre de parties de A est égal à 2^n ».

Pour constituer une partie de A, il y a deux choix pour chaque éléments de A : l'incorporer dans cette partie ou pas. puisque A possède n éléments, cela donne au total 2^nparties possibles. Il y a ainsi autant de parties de A que de n-uplet de $\{0;1\}$, soit 2^n. ■

2. Nombres de combinaisons

Définition 9:

Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n. Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$.

Propriété 7 :

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. Alors :

1. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Relation de Pascal : si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
3. De plus, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et si $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration :

1. Propriété à démontrer : « $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ».

   Soient A un ensemble non vide de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n. Soient B une partie de A à k-éléments. L'ensemble A/B possède $n-k$ éléments.
   À chaque partie à k éléments de l'ensemble A, on peut associer de manière univoque une partie à $n-k$ éléments de l'ensemble A. Ainsi, le cardinal de l'ensemble des combinaisons à k éléments de A est égal au cardinal de l'ensemble des combinaisons à $n-k$ éléments de A, c'est-à-dire $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. ■

2. Propriété à démontrer : « $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ».

   Méthode par argument de dénombrement :

   Il existe $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments de A. L'élément a étant fixé et appartenant à la combinaison considérée, il faut encore choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ restants : il y a $\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons possibles.

   Si l'élément a n'appartient pas à la combinaison, il faut choisir k éléments parmi les $n-1$ restants, soit $\binom{n-1}{k}$ possibilités.
   Notons A_a l'ensemble des combinaisons à k éléments de A contenant l'élément a et $\overline{A_a}$ l'ensemble des combinaisons à k éléments de A ne contenant pas l'élément a. Ces ensembles sont évidemment disjoints et leur union vaut l'ensemble des combinaisons à k éléments de A.
   Ainsi, $\binom{n}{k} = \text{Card}(A_a \cup \overline{A_a}) = \text{Card}(A_a) + \text{card}(\overline{A_a}) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ■

   Méthode par le calcul :

   En procédant méthodiquement, on obtient le calcul ci-après :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{k}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{n-k}{n-k} \times \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= k \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} + (n-k) \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$
■

3. Conséquence direct des propriété ci-dessus. ■

Remarque :

Le relation de récurrence ci-dessus permet, notamment, de construire rapidement les premières valeurs de $\binom{n}{k}$ et on obtient le triangle de Pascal :

n = 0						1					
n = 1					1		1				
n = 2				1		2		1			
n = 3			1		3		3		1		
n = 4		1		4		6		4		1	
n = 5	1		5		10		10		5		1

La symétrie du triangle illustre la première propriété mentionnée ci-dessus. On peut également adopter la disposition suivante :

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1

Propriété 8 :

Soit n un entier naturel, on a : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration : *Exigible en fin de terminale*

Propriété à démontrer : « $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ ».

Soit A un ensemble fini à n éléments ; pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A composées de k éléments. On a ainsi $\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$. Les A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est $\mathscr{P}(A)$. Ainsi :

$$2^n = \text{Card}(\mathscr{P}(A)) = \text{Card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=0}^{n}\text{Card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Exemple 7:

Dans une grille comportant les nombres 0 à 9 et les lettres A et F, il faut choisir trois nombres et deux lettres. Combien de grilles différentes existe-t-il ?

Pour les nombres, il existe $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ combinaisons possibles.

Pour les lettres on dispose de $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$ combinaisons possibles.

Au total, il y a donc $120 \times 15 = 1800$ grilles possibles.