❄ Chapitre 6 ❄

Dérivation et convexité

I. Dérivée seconde d'une fonction

Définition 1:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est elle-même dérivable. La dérivée de f', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Exemple 1:

La fonction $f(x) = x^4$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$.

II. Fonctions convexes

Définition 2:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On dit que f est convexe sur I lorsque sa courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses sécantes entre deux points d'intersection.

Propriété 1 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

f est convexe sur $I \Longleftrightarrow \mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes $\Longleftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Longleftrightarrow f''$ est positive sur I

Démonstration :

Propriété à démontrer : « f est **convexe** sur I, si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$ »

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère et $\mathscr{T}$ est une tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
Supposons que, pour tout $x \in I$, $f''x) > 0$µ. Soit φ la fonction définie sur I par :

$$\varphi(x) = f(x) - (f'(a) \times (x-a) + f(a)) = f(x) - f'(a) \times (x-a) - f(a)$$

Comme f est deux fois dérivable sur I, φ l'est aussi, et on a, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$ et $\varphi''(x) = f''(x)$.
Ainsi, $\varphi''(x) > 0$ (car $f''(x) > 0$ par hypothèse) et donc $\varphi'(x)$ est croissante sur I.

- Si $x > a$, alors on a $\varphi'(x) > \varphi'(a)$. Or $\varphi'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. D'où $\varphi'(x) > 0$. Alors φ est croissante. On a donc $\varphi(x) > \varphi(a)$.
  Or $\varphi(a) = f(a) \times f'(a)(a-a) - f(a) = 0$. Donc $\varphi(x) > 0$.
  Ainsi, $f(x) - \big(f'(a) \times (x-a) + f(a)\big) > 0$ donc $f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$ et donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{T}$.
- Si $x < a$, alors on a $\varphi'(x) < \varphi'(a)$. Or $\varphi'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. D'où $\varphi'(x) < 0$. Alors φ est décroissante. On a donc $\varphi(x) > \varphi(a)$.
  Or $\varphi(a) = f(a) \times f'(a)(a-a) - f(a) = 0$. Donc $\varphi(x) > 0$.
  Ainsi, $f(x) - \big(f'(a) \times (x-a) + f(a)\big) > 0$ donc $f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$ et donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{T}$.

Dans les deux cas, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{T}$ et donc f est convexe. ■

Méthode 1 : *Étude de la convexité d'une fonction*

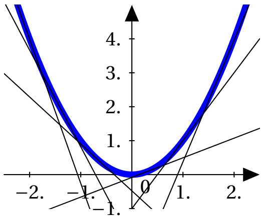
Étudions la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.

1. Calculons de la dérivée seconde : f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = 12x^2$.
2. Étudions du signe de f'' : $f''(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 12x^2 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$
3. Appliquons la propriété : f'' est positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2:

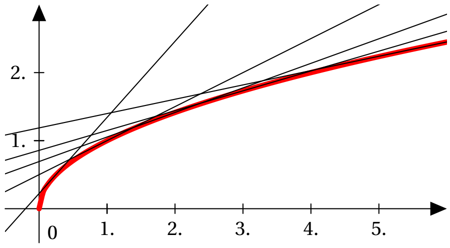
La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $f'(x) = 2x$ et la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$.



La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est concave sur $]0;+\infty[$.

Pour tout x réel strictement positif, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et la fonction g' est décroissante sur $]0;+\infty[$.



III. Point d'inflexion

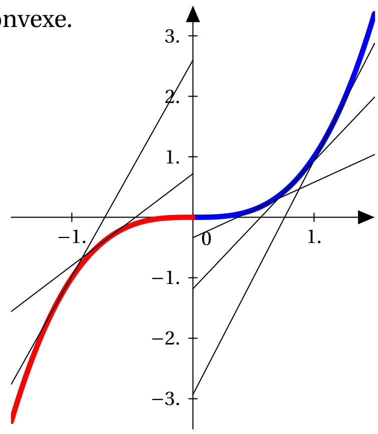
Définition 3:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Soit $a \in I$. Dire que le point $A\big(a; f(a)\big)$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ signifie qu'en A la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente.

Conséquence Soit l'abscisse a, f passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

Exemple 3:

La fonction $f(x) = x^3$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.
La fonction admet donc comme point d'inflexion l'origine du repère.



Propriété 2 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère et $a \in I$.
Le point $A\big(a; f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Le point $A\big(a; f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe »

f'' s'annule en changeant de signe en a si, et seulement si, f' change de sens de variation en a. Donc f change de convexité en a et la fonction f admet alors un point d'inflexion en a. ■

Méthode 2 :

Montrons que la fonction cube admet un point d'inflexion :

1. On vérifie que la fonction est deux fois dérivable sur l'intervalle étudié : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme .
2. On calcul f'' : $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
3. Étude du signe de f'' : $f''(x) \geqslant 0 \iff 6x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

4. On conclue : la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0. On retrouve le fait que l'origine O du repère représente un point d'inflexion de la courbe de f.