❉ Chapitre 12 ❉

Fonction logarithme népérien

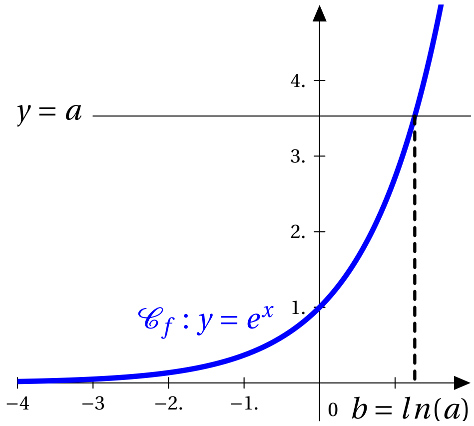
I. Lien avec la fonction exponentielle

Définition 1:

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$, qui à tout nombre réel $x>0$ associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$, d'inconnue y.
On note cette solution $y = \ln x$.

Conséquences :

1. Pour tout réel $x>0$ et pour tout réel y,
$$e^y = x \Longleftrightarrow y = \ln x$$
2. Pour tout réel $x>0$,
$$e^{\ln x} = x$$
3. Pour tout réel x,
$$\ln\left(e^x\right) = x$$



Propriété 1 :

Pour tous réels a et b strictement positif :

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$

Méthode 1 : *Résoudre une équation avec* ln

Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$:

- Rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
- Résoudre dans E, l'équation $u(x) = v(x)$.

Exemple 1:

On va résoudre l'équation $\ln(x+2) = \ln(3-x)$.
Conditions d'existence : $x+2>0$ et $3-x>0$.
C'est-à-dire : $x>-2$ et $3>x$. D'où $E =]-2;3[$.
Pour tout $x \in E$, $\ln(x+2) = \ln(3-x)$ équivaut à $x+2 = 3-x$ c'est-à-dire $2x = 1$ ou encore $x = \dfrac{1}{2}$.
Ce nombre appartient bien à E. Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Méthode 2 : *Résoudre une inéquation avec* ln

Pour résoudre une inéquation du type $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$:

- Rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
- Résoudre dans E, l'inéquation $u(x) < v(x)$.

Exemple 2:

On va résoudre l'inéquation $\ln(x^2+3x) < \ln 18$.
Condition d'existence : $x^2+3x>0$ soit $x(x+3)>0$. D'où $E =]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[$.
Pour tout $x \in E$, $\ln(x^2+3x) < \ln 18$ équivaut à $x^2+3x < 18$ ou encore $x^2+3x-18 < 0$.
Le trinôme $x^2+3x-18$ a pour discriminant $\Delta = 81$ et pour racines -6 et 3.
Donc $x^2+3x-18 < 0 \iff x \in]-6;3[$.
En tenant compte du fait que x appartient à E, on a finalement, $S =]-6;-3[\cup]0;3[$.

II. Relations fonctionnelles

Définition 2:

Pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Conséquences :

Pour tous réels strictement positifs a, b et tout entier naturel p, on a :

1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
2. $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
3. $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$
4. $\ln(a^p) = p\ln a$
5. $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

Exemple 3:

Simplifions $A = \ln\dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x+2}}$

$$A = \ln\frac{(x+2)^2}{\sqrt{x+2}} = \ln(x+2)^2 - \ln\sqrt{x+2} = 2\times\ln(x+2) - \frac{1}{2}\times\ln(x+2) = \frac{3}{2}\times\ln(x+2)$$

Méthode 3 : *Résoudre une inéquation avec une inconnue à l'exposant*

On cherche à résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,01$ avec $n \in \mathbb{N}$.

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$ donc l'inéquation $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,01$ est équivalente à $\ln\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] \leqslant \ln 0,01$.

Pour tout $a > 0$, $\ln(a^n) = n\ln a$, donc l'inéquation s'écrit : $n\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \leqslant \ln 0,01$.

En divisant chaque membre par $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$ qui est strictement négatif, le sens de l'inégalité change.

$$n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad \text{or} \quad \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4,19$$

L'ensemble solution est constitué de tous les entiers $n \geqslant 5$.

III. Étude de la fonction $\ln x$

1. Continuité

Définition 3:

La fonction logarithme népérien est définie et continue sur $]0;+\infty[$

2. Dérivée de la fonction $\ln x$

Propriété 2 :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ »

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$. La fonction ln étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, f est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, calculons $f'(x)$ de deux manières :

- $f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = x\ln'(x)$
- $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$.

On en déduit que pour tout réel $x>0$, $x\ln'(x) = 1$, par suite $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. ■

3. Limite de la fonction $\ln x$

Propriété 3 :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration :

- Propriété à démontrer : « $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ »

  Pour tout réel $A>0$,
  $\ln x > A \iff x > \mathrm{e}^A$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. ■

- Propriété à démontrer : « $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ »

  Pour tout réel $x>0$, on pose $X = \dfrac{1}{x}$. On a $x = \dfrac{1}{X}$ donc $\ln x = \ln\dfrac{1}{X} = -\ln X$
  $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} (-\ln X) = -\infty$ donc par limite d'une composée $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. ■

Propriété 4 : *Croissance comparée*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

Démonstration :

- Propriété à démontrer : « $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ »

  Pour tout réel $x>0$, on effectue le changement de variable : $X = \ln x$, on a alors $x = \mathrm{e}^X$.
  Ainsi $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}}$.

  Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc par limite d'un quotient $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} = 0$.

  Enfin, par limite d'une composée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. ■

- Propriété à démontrer : « $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ »

  Pour tout réel $x>0$, on pose $X = \ln x$, on a alors $x\ln x = \mathrm{e}^X \times X$.
  On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} X = \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et par propriété, $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$, donc par limite d'une composée, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$. ■

Remarque :

La propriété précédente est vraie pour n'importe quel polynôme de degré n :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}x^n\ln x=0$$

Propriété 5 : *Limite et taux d'accroissement*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$ »

La fonction ln est dérivable en 1 donc, par définition, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=\ln'(1)$.

Or $\ln 1=0$ et $\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$, on obtient donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$. ■

Méthode 4 : *Lever une indétermination pour étudier une limite*

On cherche à déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Dans le cas d'une forme indéterminée qui fait intervenir la fonction ln, on peut :

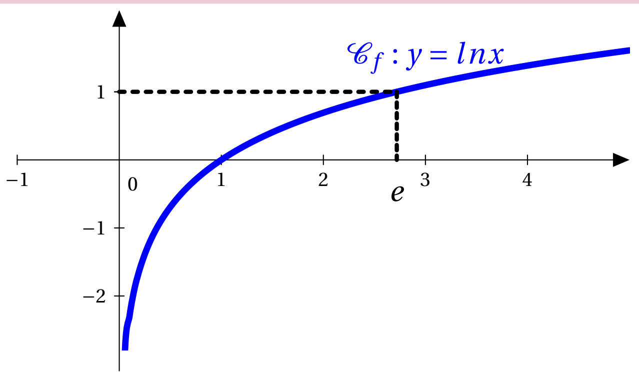
1. Factoriser et faire apparaître des limites déjà connues :
   Pour tout réel $x>0$, $\ln x-2x=x\left(\dfrac{\ln x}{x}-2\right)$. Par propriété, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-2\right)=-2$.
   Donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\ln x}{x}-2\right)=-\infty$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2x)=-\infty$.
2. Effectuer un changement de variable :
   Pour tout réel $x>0$, on pose $X=\dfrac{1}{x}$, on a alors $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln(1+X)}{X}$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et par propriété, $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$
   Donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

4. Variations de la fonction $\ln x$

Propriété 6 :

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	+		
$\ln x$	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$



Démonstration :

Propriété à démontrer : « La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ »

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est la fonction inverse.
Or la fonction inverse est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc la fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ ■

Remarque :

Une équation de la tangente à la courbe de la fonction ln en 1 est $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$ soit $y = x - 1$.

IV. Étude de la fonction $\ln u(x)$

1. Limites de la fonction $\ln u(x)$

Méthode 5 : *Étudier les limites d'une fonction du type* $\ln u$

Pour étudier les limites d'une fonction du type $\ln u$, on peut :

- utiliser le théorème sur la limite d'une composée ;
- utiliser les théorèmes de comparaison.

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

- Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x+2}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2} = 0$.
  De plus, $\lim\limits_{X\to0} \ln X = -\infty$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x+2}{x^2} > \dfrac{x}{x^2}$ donc $\dfrac{x+2}{x^2} > \dfrac{1}{x}$ or la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc $f(x) > \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ou encore $f(x) > -\ln x$.
  De plus, $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}(-\ln x) = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Dérivée de la fonction $\ln u(x)$

Propriété 7 :

Soit une fonction $u(x)$ définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est définie et dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Si $f(x) = \ln(u(x))$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ »

On utilise la formule des fonctions composées :

$$(\ln(u(x)))' = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$ ■

Méthode 6 : *Calculer la dérivée d'une fonction du type* $\ln u$

Pour dériver une fonction du type $\ln u$ sur un intervalle I, on s'assure que la fonction u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+3)$. Calculons $f'(x)$.
Posons $u(x) = x^2 + 3$. u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+3}$.

V. Fonction logarithme décimale

Cette partie, bien que hors programme, peut avoir un intérêt en Physique-Chimie, ainsi qu'en Sciences de la Vie et de la Terre.

Définition 4:

La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$, par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Propriété 8 :

1. Pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$.
2. La fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
3. Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\log(ab) = \log a + \log b \text{ et } \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

Démonstration :

Remarque :

Les logarithmes décimaux trouvent toute leur utilité en chimie (calcul de pH), en acoustique (mesure du son), en sismologie (magnitude d'un séisme), en astronomie (magnitude apparente d'un astre)...