❄ Chapitre 15 ❄

Fonctions trigonométriques

I. Rappel

1. Le radian

Définition 1:

Le **radian** est, comme le degré ou le grade, une unité de mesure d'angles définie de la façon suivante :

Si A et M sont deux points d'un cercle de centre O de rayon r, l désigne la longueur de l'arc $\widehat{AM}$

La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est le réel $\alpha = \dfrac{l}{r}$

Remarque :

- Le cas particulier $r = 1$ est intéressant car alors $l = \alpha$. Dans ce cas, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est égale à la longueur de l'arc géométrique $\widehat{AM}$
- Il y a proportionnalité entre la mesure en degrés et la mesure en radians :
  360 degrés = 2π radians ou encore 180 degrés = π radians

Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30
Mesure en radians	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

2. Le cercle trigonométrique

Définition 2:

- Un **cercle orienté** est un cercle sur lequel on distingue les deux sens de parcours : le sens direct ou indirect,
- Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 orienté de telle sorte que le sens direct est celui du sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarque :

- Sens direct : sens positif, sens trigonométrique, sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Sens indirect : sens négatif, sens horaire .

II. Angles orientés

1. Mesure d'un arc ou d'angle orienté de vecteurs

$(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique de centre O, A et M sont deux points de $(\mathscr{C})$

Définition 3:

Une mesure, en radians, de l'arc orienté $\widehat{AM}$ ou de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ est la longueur de chemin parcouru pour aller de A à M dans le sens direct

Propriété 1 :

Si α est une mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{AM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, alors toutes les mesures en radians de cet arc sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un nombre entier relatif

Remarque :

Le "k" détermine en fait un nombre de tours que l'on effectue sans le sens direct si k est positif, et dans le sens indirect si k est négatif

2. Mesure principale

Définition 4:

On appelle **mesure principale**, en radians, son unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

III. Fonctions sinus et cosinus

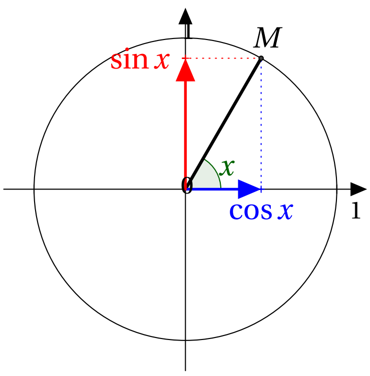
Définition 5:

Soit x un réel quelconque. Il lui correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de $(\widehat{AOM})$.

- Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $(O; I; J)$.
- Le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O; I; J)$.

$\cos x$ et $\sin x$ sont donc respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(O; I; J)$.

On note : $M(\cos x; \sin x)$

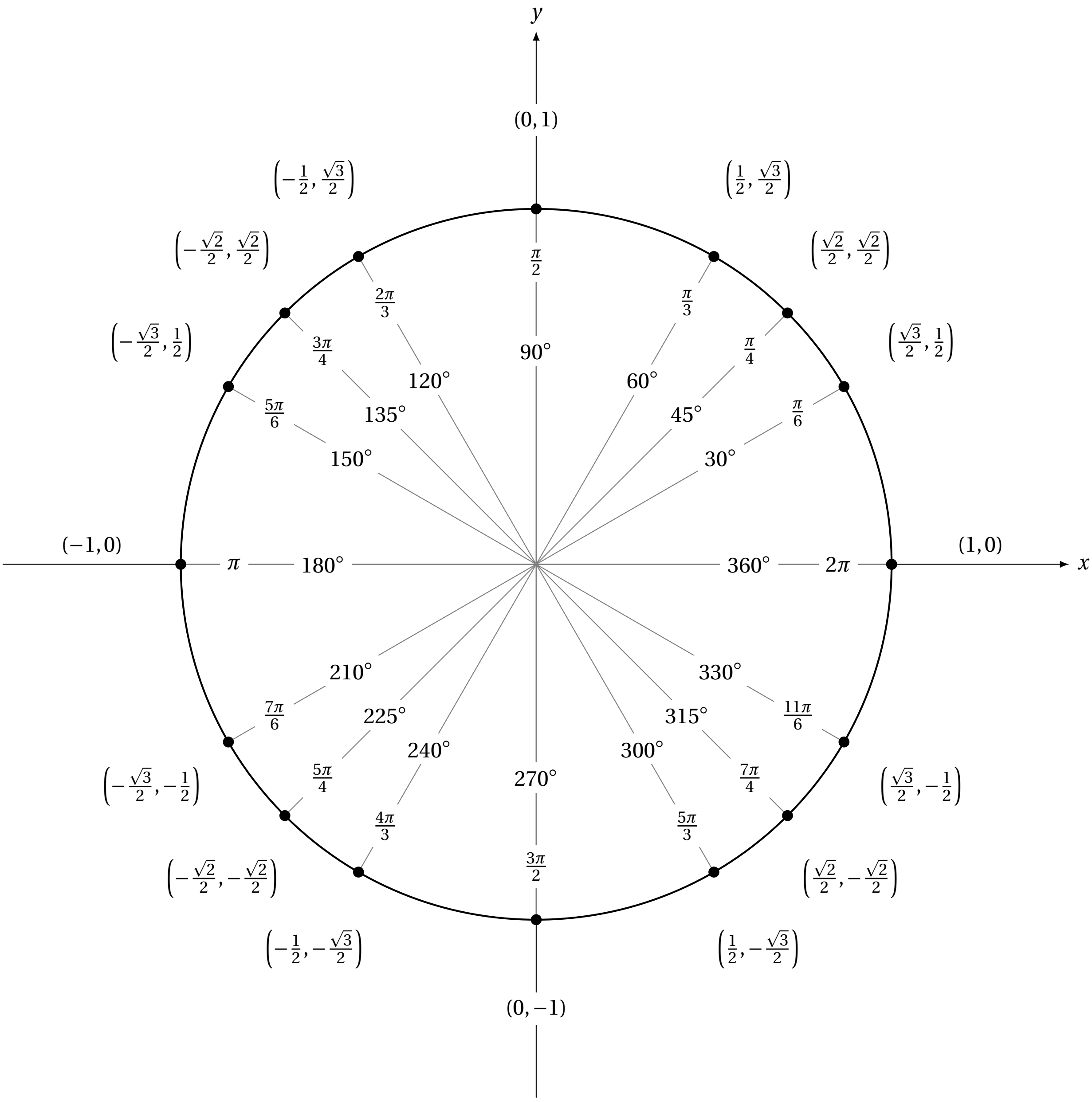


D'après le cercle trigonométrique, on peut « lire » les propriétés suivantes :

Propriété 2 :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad$ et $\quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Valeurs particulières importantes à connaitre!!!



On peut donc établir le tableau suivant :

valeur de x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
valeur de x en degrés	0	30	45	60	90	180
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

1. Périodicité

Définition 6:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est T-périodique si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+T) = f(x)$.

Propriété 3 :

D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

$$\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{cases}$$

Démonstration :

Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x+2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique. ■

Remarque :

Cela signifie que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, c'est à dire qu'elles se répètent de manière identique tous les 2π.

D'un point de vue graphique, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation pour obtenir la courbe représentative complète de la fonction sinus et cosinus.

2. Parité

Propriété 4 :

D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

Remarque :

Ce qui signifie que la fonction cosinus est paire (elle admet un symétrie, l'axe des ordonnées), et que la fonction sinus est impaire (elle admet 0 comme centre se symétrie).

Définition 7:

- Une fonction f est paire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$
- Une fonction f est impaire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.

3. Autres propriétés

Propriété 5 :

Pour tout nombre réel x, on a :

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

IV. Variations et courbe représentative

1. Dérivabilité

Propriété 6 : *Admise*

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0 et on a :

$$\cos'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin'(0) = 1$$

Propriété 7 :

les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Démonstration :

- Propriété à démontrer : « $\cos'(x) = -\sin(x)$ »

  Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul.

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}\\ &= \cos x\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

  Or, cosinus et sinus sont dérivables en 0 de dérivées respectives 0 et 1 donc :

  Avec la propriété précédente, on a : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$

  Donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x$.

- Propriété à démontrer : « $\sin'(x) = \cos(x)$ »

  Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}\\ &= \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

  donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$. ■

2. Variations

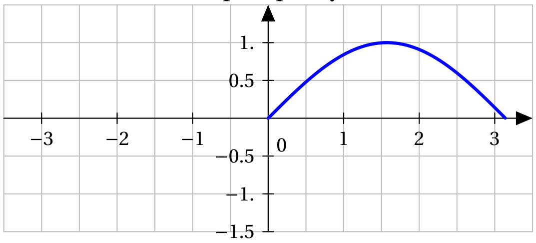
Les fonctions sinus et cosinus étant 2π-périodiques, on les étudie sur un intervalle de période 2π
Ces fonctions étant aussi paire ou impaire, on peut encore restreindre l'intervalle à $[\ 0\ ;\pi\ ]$
On obtient les tableaux de variations par lecture du cercle trigonométrique :

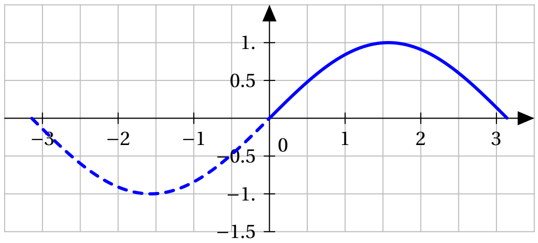
Fonction sinus

Le tableau de variations sur l'intervalle $[0;\pi]$ de la fonction sinus est :

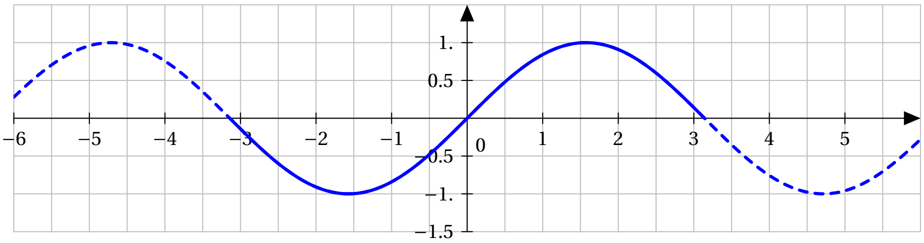
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$, puis par symétrie centrale, sur $[\ -\pi\ ;\ \pi\ ]$





puis par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction sinus qui s'appelle une **sinusoïde**

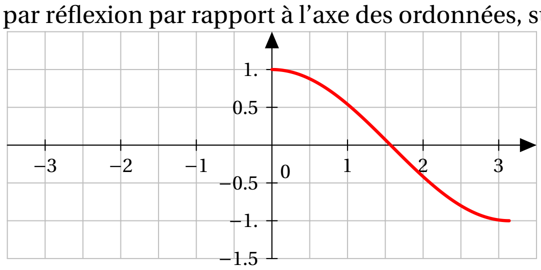


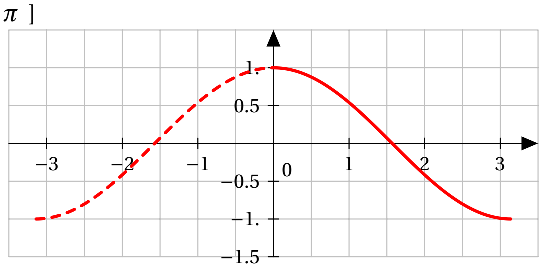
Fonction cosinus

Le tableau de variations sur l'intervalle $[0; \pi]$ de la fonction cosinus est :

x	0		π
$\cos'(x)$	0	$-$	0
$\cos(x)$	1	↘	-1

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$, puis par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, sur $[\ -\pi\ ;\ \pi\ ]$





par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus qui s'appelle une **sinusoïde** :