❉ Chapitre 7 ❉

Géométrie vectorielle dans l'espace

I. Vecteurs de l'espace

1. Translations

Définition 1:

Soient A et B deux points distinct de l'espace. La translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui, à tout point C, associe un unique point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété 1 :

Soient A et B deux points de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On note A' et B' les images respectives de A et B par la translation t. On a alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « A' et B' les images de A et B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ »

On note t: $A \mapsto A'$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$; autrement dit $t(A) = A' \iff \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$.
De même, $t(B) = B' \iff \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{u}$.
D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ ■

2. Vecteur colinéaires, vecteurs coplanaires

Définition 2:

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel λ tel que

$$\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$$

Propriété 2 :

Trois points A, B et C de l'espace deux à deux distinct sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Trois points A, B et C de l'espace deux à deux distinct sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. »

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même direction, c'est à dire, si et seulement si, (AB) ET (AC) sont parallèles.
Or, A appartient à ces deux droites. Elles sont donc confondues, ce qui équivaut à dire que les points A, B, et C sont alignés. ■

Définition 3:

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont dans un même plan.

Propriété 3 :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ »

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
On considère les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

(⇒) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en O. Les points O, A et B ne sont pas alignés.
On note R le projeté orthogonale de C sur (OA) parallèlement à (OB). $R \in (OA)$ donc les points O, A et R sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OA}$.
Par construction, les droites (RC) et (OB) sont parallèles. Les vecteurs $\overrightarrow{RC}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donc colinéaires. Il existe alors un réel μ tel que $\overrightarrow{RC} = \mu\overrightarrow{OB}$.
Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

(⇐) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, donc $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est un repère du plan.

Soit le point E du plan (OAB) de coordonnées $(\lambda; \mu)$ dans ce repère. On a $\overrightarrow{OE} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$. Or, $\overrightarrow{OE} = \vec{w}$ et comme O, A, B et E sont coplanaires alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le sont également. ■

Méthode 1 :

On considère une pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base est un parallélogramme $ABCD$. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Pour démontrer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il suffit de déterminer les réels λ, μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
Pour cela, on décompose le vecteur $\vec{w}$ en utilisant le fait que $ABCD$soit un parallélogramme et la relation de Chasles.

On a $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$. Or, $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
On a alors $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v}$ donc les vecteurs sont coplanaires.

3. Vecteurs linéairement indépendants et base de l'espace

Définition 4:

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et a, b et c trois réels.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits linéairement indépendants lorsqu'il ne sont pas coplanaires, autrement dit lorsque $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow a = b = c = 0$.

Définition 5:

Trois vecteurs linéairement indépendants forment une base de l'espace.

Propriété 4 :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels$(x; y; z)$ tel que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Cette décomposition est unique.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels$(x;y;z)$ tel que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. »

Soient $\vec{w}$ un vecteur de l'espace, O un point de l'espace et M le point tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$. On note M' le projeté de M sur le plan de repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ parallèlement à l'axe (Oz).
On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MM'}$. Or $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires donc il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$. De plus, $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On a ainsi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MM'} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, soit $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ■

Méthode 2 :

Dans la base $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ puis montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Que peut-on en déduire?

1. Chacun des vecteurs est écrit en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, on détermine donc directement les coordonnées en analysant les coefficients :
$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. Pour montrer que les vecteurs sont linéairement indépendants, on résout le système associé à l'équation vectorielle $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$, on doit obtenir $a = b = c = 0$:
$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

3. On applique la définition : Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants. ils forment donc une base de l'espace.

II. Droites et plans de l'espace

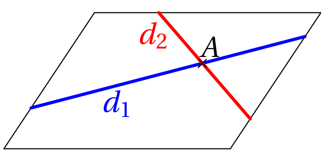
1. Droite de l'espace

Définition 6:

Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est une droite.
$(A;\vec{u})$ est un repère de cette droite. On dit que la droite est dirigé par $\vec{u}$.

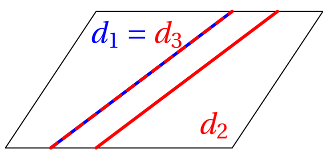
Définition 7: *Position relative de deux droites*

Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires ou non.
Si elles sont coplanaires, alors elles appartiennent à un même plan. Elles peuvent être sécantes ou parallèles (strictement parallèles ou confondues).



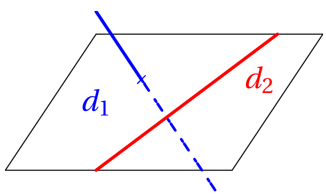
Droites coplanaires sécantes :

un point d'intersection



Droites coplanaires parallèles :

aucun ou une infinité de points d'intersection



Droites non coplanaires :

aucun point d'intersection

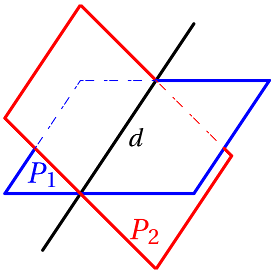
2. Plans de l'espace

Définition 8:

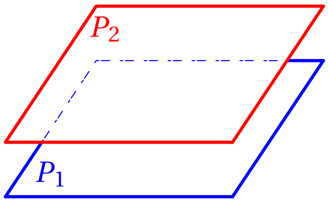
Soient A un point de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$, avec λ et μ des réels, est un plan de l'espace.
$\left(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$ est un repère du plan. On dit que la droite est dirigé par la base $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$.

Définition 9: *Position relative de deux plans*

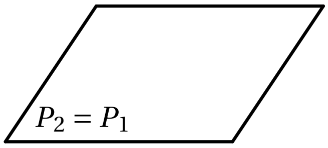
Plans sécants : un droite d'intersection



Plans parallèles strictement : aucun point d'intersection

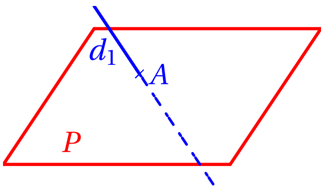


Plans parallèles confondus : un plan d'intersection

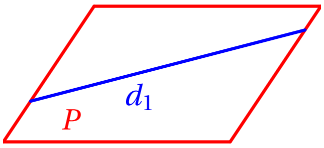


Définition 10: *Position relative de d'une droite et d'un plan*

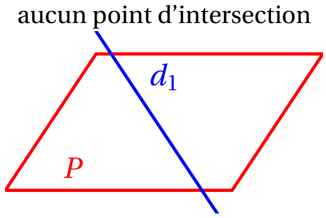
Droite et plan sécants : un point d'intersection



Droite et plan parallèles : droite incluse dans le plan



Droite et plan parallèles : aucun point d'intersection



III. Parallélisme

1. Parallélisme d'une droite et d'un plan

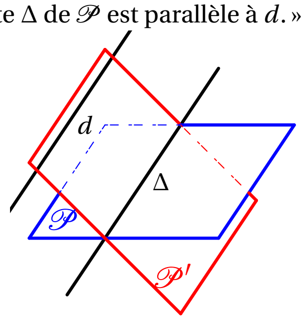
Propriété 5 :

Une droite d est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe une droite Δ de $\mathscr{P}$ est parallèle à d.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Une droite d est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ $\Longleftrightarrow$ il existe une droite Δ de $\mathscr{P}$ est parallèle à d. »

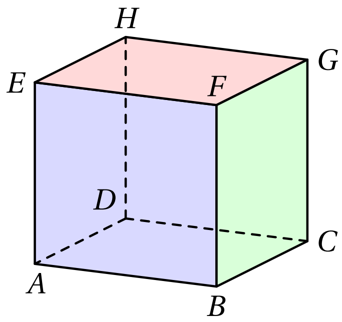
Le résultat est évident lorsque d est incluse dans $\mathscr{P}$.
Supposons que d n'est pas incluse dans $\mathscr{P}$.



$(\Rightarrow)$: On suppose que d est parallèle à $\mathscr{P}$. Soit un plan $\mathscr{P}'$, sécant à $\mathscr{P}$, contenant d et contenant un point A de $\mathscr{P}$. On note Δ leur intersection. Les droites d et Δ sont coplanaires car elles sont incluses dans $\mathscr{P}'$.
Supposons que d et Δ sont séantes en un point B. $B \in \Delta$ donc $B \in \mathscr{P}$. or $B \in d$ donc $B \in B \cap d$, ce qui est contradictoire avec le fait que d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles. d et Δ ne sont pas sécantes : elles sont parallèles.

$(\Leftarrow)$: On suppose qu'il existe une droite Δ incluse dans $\mathscr{P}$ telle que $d//\delta$. Notons $\mathscr{P}'$le plan contenant Δ et d et supposons que d et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles. Il existe alors un point R tel que $R \in d \cap \mathscr{P}$.
Ainsi, $R \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$, donc $R \in \Delta$, ce qui est contradictoire avec le fait que d et Δ sont strictement parallèles. ainsi d et $\mathscr{P}$ ne sont pas sécants : ils sont donc parallèles. ■

Exemple 1:



Dans le cube ci-contre, on peux dire que la droite (AC) est parallèle au plan (EFH) car elle est parallèle à la droite $(EG) \in (EFH)$
Avec la même méthode, on pourra montrer que la droite (AH) est parallèle au plan (BCG), ou encore que la droite (EF) est parallèle au plan (AHG)

2. Parallélisme de deux plans

Propriété 6 :
Si un plan $\mathscr{P}$ contient deux droites d et d' sécantes parallèles au plan $\mathscr{P}'$ alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

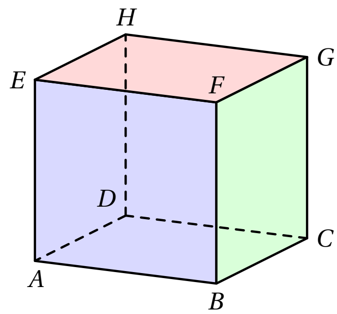
Démonstration :

Propriété à démontrer : « Si un plan $\mathscr{P}$ contient deux droites d et d' sécantes parallèles au plan $\mathscr{P}'$ alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles. »

($\Rightarrow$) : Admis

($\Leftarrow$) : Soient d et d' deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note Δ et Δ' deux droites sécantes de $\mathscr{P}'$ respectivement parallèles à d et d'.
$\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est donc une base de $\mathscr{P}$. Or d et d' sont parallèles à Δ et Δ' donc $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est une base de $\mathscr{P}'$. Les plans ont donc la même direction et sont donc parallèles. ■

Exemple 2:



Dans le cube ci-contre, on peux dire que la droite (EG) et (EF) sont sécantes et parallèles aux droites (AC) et (AB). Les plans (EHG) et (ADC) sont donc parallèles.
Avec la même méthode, on pourra montrer que le plan (EAH) est parallèle au plan (FGC), ou encore que le plan (EAF) est parallèle au plan (DHC)

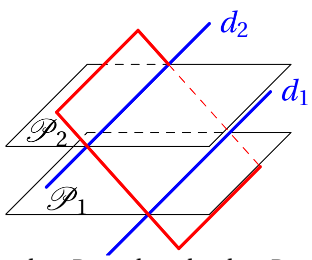
3. Parallélisme de deux droites

Propriété 7 :
Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles. »

Soit $\mathscr{P}$ un plan sécant à P_1distinct de P_1.
Alors $\mathscr{P}$ est également sécant à P_2 car sinon, on aurait $\mathscr{P}//P_2$ et $P_1//P_2$ d'où $\mathscr{P}//P_1$, ce qui est absurde.
On note respectivement d_1 et d_2 les droites définies par $d_1 = \mathscr{P} \cap P_1$ et $d_2 = \mathscr{P} \cap P_2$.
Ces droites sont incluses dans $\mathscr{P}$ donc elles sont soit parallèles, soit sécantes.

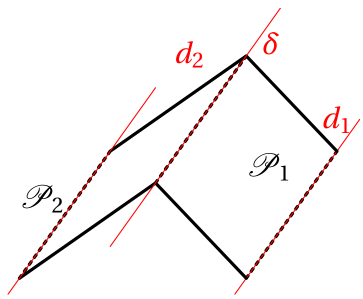


Si elles étaient sécantes, elles auraient un point d'intersection situé à la fois dans le plan P_1 et dans le plan P_2, ce qui est impossible. Donc d_1 et d_2 sont parallèles. ■

Propriété 8 : *Théorème du toit*
Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans sécants suivant une droite δ, si $d_1 \in \mathscr{P}_1$ et $d_2 \in \mathscr{P}_2$ sont deux droites parallèles alors la droite δ est parallèle aux droites d_1 et d_2.

Démonstration :

Par hypothèse, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants, donc leur intersection est une droite δ ; et les droites d_1 et d_2 sont parallèles.
Donc : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \delta$ et $d_1 // d_2$
Les droites d_1 et d_2 sont parallèles donc elles sont coplanaires.
Donc, il existe un plan $\mathscr{P}_3$ qui contient à la fois d_1 et d_2.
Mais alors d_1 et δ sont contenues dans $\mathscr{P}_1$; et d_2 et δ sont contenues dans $\mathscr{P}_2$.
Donc : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = d_1$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = d_2$



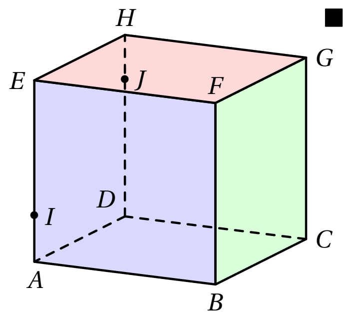
Montrons que $d_1 //\ \delta$:
Supposons que d_1 et δ ne soient pas parallèles.
Donc elles sont sécantes en un point A.
Comme $A \in d_1 \cap \delta$ donc $A \in d_1$ et $A \in \delta$.

- $A \in d_1$ et $d_1 = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3$ donc $A \in \mathscr{P}_3$.
- et $A \in \delta$ et $\delta = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ donc $A \in \mathscr{P}_2$. Ce qui donne, $A \in \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

Par conséquent : $A \in d_2$. Et comme $A \in d_1$, on en déduit que d_1 et d_2 sont sécantes en A. Ce qui est absurde, contraire à notre hypothèse.
Par conséquent les droites d_1 et δ sont parallèles. Et comme d_1 et d_2 sont parallèles, on en déduit que les droites d_2 et δ sont aussi parallèles.
Conclusion : L'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est une droite δ parallèle à la fois à d_1 et d_2. ■

Méthode 3 :

Soient le cube $ABCDEFGH$ et les points I et J représentés sur la figure ci contre.
Déterminer l'intersection des plans (IJF) et (DCG).



Si deux plans sont sécants, alors leur intersection est une droite. On commence donc par cherche un point commun a ces deux plans ou un théorème à appliquer en fonction des hypothèses données par l'énoncé ou déterminées au cours de la résolution.

Les points I et F appartiennent aux plans (ABF) et (IJF) donc la droite (IF) est l'intersection de ces deux plans. Or le plan (DCG) est parallèle au plan (ABF) car $ABCDEFGH$ est un cube.
Par ailleurs, lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont parallèles. J appartient au plan (DCG) donc $J \in (IJF) \cap (DCG)$. Ainsi, la parallèle à (IF) passant par J est la droite d'intersection recherchée.

IV. Repère de l'espace

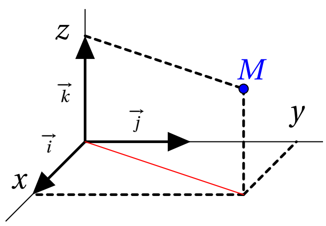
1. Coordonnées d'un point de l'espace

Définition 11:

Un repère de l'espace est défini par la donnée d'un point O de l'espace et d'une base $\left(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$ de l'espace.

Définition 12:

On considère un repère $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\,)$.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.
x, y et z sont les coordonnées de M dans le repère $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\,)$.



2. Opération sur les coordonnées

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\,)$

Propriété 9 :

On considère les points $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B; z_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$. »

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -x_A\overrightarrow{i} - y_A\overrightarrow{j} - z_A\overrightarrow{k} + x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j} + z_B\overrightarrow{k} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + \left(y_B - y_A\right)\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\overrightarrow{k}$ ■

Propriété 10 :

On considère les points $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B; z_B\right)$.

Les coordonnées du du milieu I de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Les coordonnées du du milieu I de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$. »

I est le milieu de $[AB]$. Ainsi, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_A\overrightarrow{i} + y_A\overrightarrow{j} + z_A\overrightarrow{k}\right) + \frac{1}{2}\left(x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j} + z_B\overrightarrow{k}\right) = \frac{x_A + x_B}{2}\overrightarrow{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\overrightarrow{j} + \frac{z_A + z_B}{2}\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Donc $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ ■

Exemple 3:

On considère les points $A(1;-1;2)$ et $B(3;1;-4)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \\ -4-2 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Et I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+(-1)}{2}; \frac{-1+1}{2}; \frac{2+(-4)}{2}\right)$. Donc $I(0;0;-1)$

Propriété 11 :

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \\ z_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$ et α un nombre réel.

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} + x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{v}} \\ z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$.
2. Les coordonnées du vecteur $a\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} ax_{\overrightarrow{u}} \\ ay_{\overrightarrow{u}} \\ az_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$

Démonstration :

1. Propriété à démontrer : « $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} + x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{v}} \\ z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$. »

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{j} + z_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{k} + x_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{j} + z_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{k} = \left(x_{\overrightarrow{u}} + x_{\overrightarrow{v}}\right)\overrightarrow{i} + \left(y_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{v}}\right)\overrightarrow{j} + \left(z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}\right)\overrightarrow{k}$$

■

2. Propriété à démontrer : « $a\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} ax_{\overrightarrow{u}} \\ ay_{\overrightarrow{u}} \\ az_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ »

$$a\overrightarrow{u} = a\left(x_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{j} + z_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{k}\right) = ax_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{i} + ay_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{j} + az_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{k}$$

■

Méthode 4 :

Dans un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$, on donne les points $E(-1;3;2)$, $F(2;-1;3)$ et $G(-1;0;1)$. Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EG}$.

On pose $M(x;y;z)$. On détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EM}$ en fonction de x, y, et z et des coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$. On traduit l'égalité vectorielle de l'énoncé par un système.

On pose $M(x;y;z)$.
On a $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
D'après l'égalité vectorielle, $\begin{cases} x+1=3 \\ y-3=-4+2\times(-3) \\ z-2=1+2\times(-1) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=2 \\ y=-7 \\ z=1 \end{cases}$