❄ Chapitre 2 ❄

Limites de fonctions

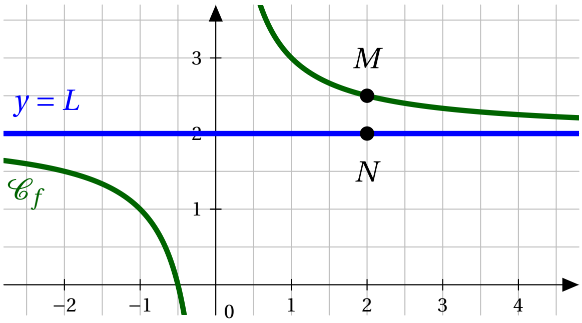
I. Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie à l'infini

Intuitivement : On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple 1:

La fonction définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.



En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définition 1:

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Définition 2:

- La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Remarque :

Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction « se rapproche »de son asymptote. La distance MN tend vers 0.

2. Limite infinie à l'infini

Intuitivement : On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple 2:

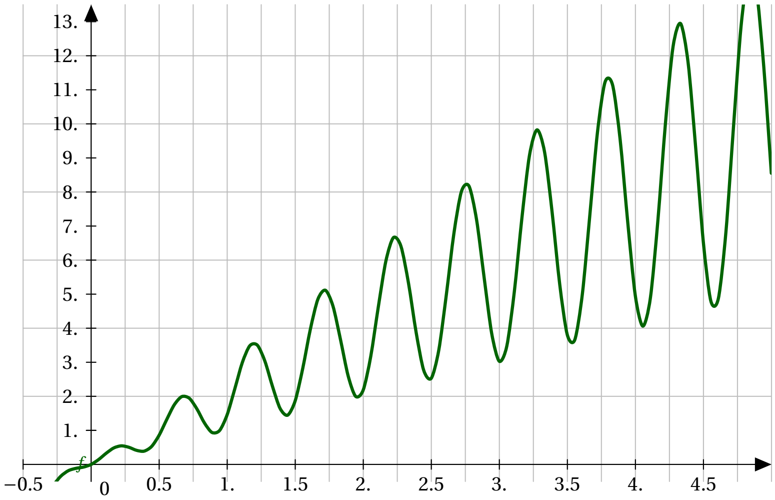
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand. Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle]ša; $+\infty$[contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

Définition 3:

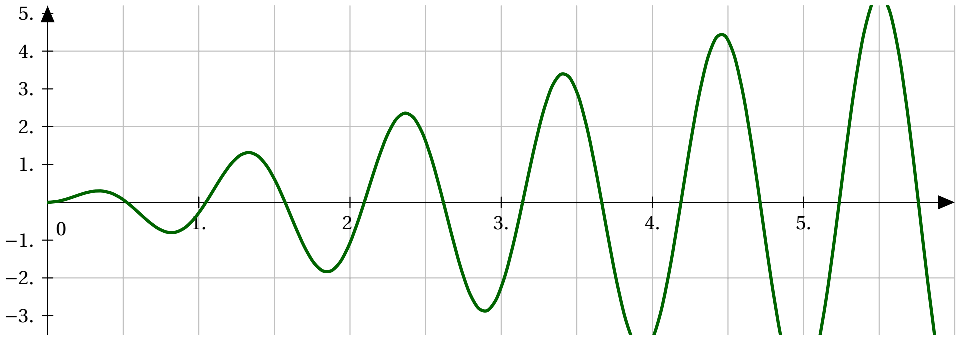
- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty|$, $a \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty; b[$, $b \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarque :

Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas de certaines fonctions sinusoïdales.



3. Limites des fonctions usuelles

Propriété 1 : *Admise*

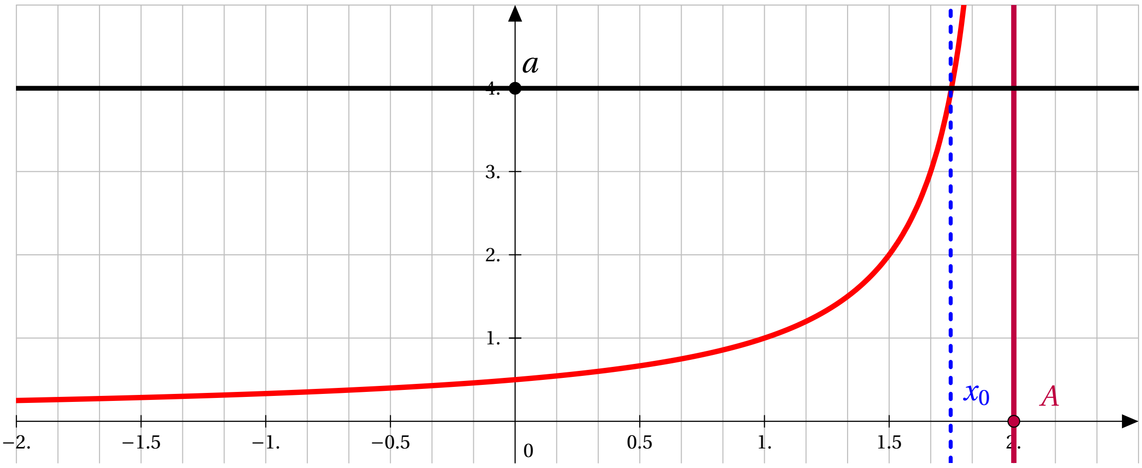
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement : On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

Exemple 3:

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A.



En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A.

Définition 4:

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a;+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty;b[$, $b \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$

Définition 5:

La droite d'équation $x = A$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f si :

$$\lim_{x \to A} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to A} f(x) = -\infty$$

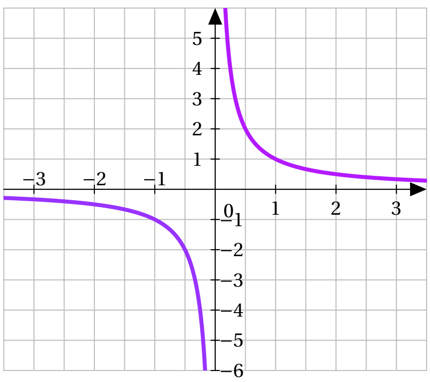
Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$.
- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

  On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0.



III. Opération sur les limites

α peut désigner un réel quelconque, $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Limites d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \big(f(x)+g(x)\big) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2. Limites d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \big(f(x)\times g(x)\big) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

3. Limites d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

IV. Limite d'une fonction composée

Propriété 2 : *Admise*

A, B, C peuvent désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to A} u(x) = B$ et $\lim\limits_{x\to B} v(x) = C$ alors $\lim\limits_{x\to A} v(u(x)) = C$

Exemple 4:

Soit la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}$. On souhaite calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On considère les fonctions u et v définie par : $u(x)=2-\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
Alors : $f(x)=v(u(x))$. On dit alors que f est la composée de la fonction u par la fonction v.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 2$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2-\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{u(x)} = \lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

V. Limite et comparaison

1. Théorème de comparaison

Propriété 3 :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (Figure 1)
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (Figure 2)

Démonstration :

On cherche a démontrer la propriété : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m;+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) \geqslant m$.

Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) \geqslant m$.

Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ■

Propriété 4 :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]-\infty;a[$, a réel, telles que pour tout $x < a$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ (Figure 3)
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (Figure 4)

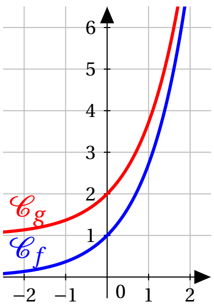


Figure 1

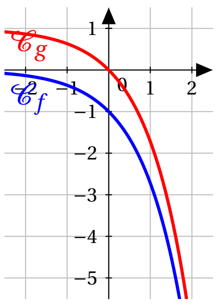


Figure 2

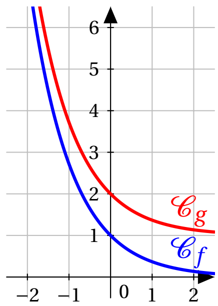


Figure 3

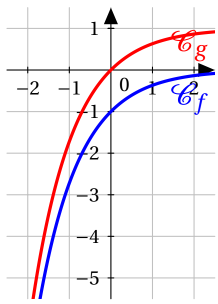


Figure 4

2. Théorème d'encadrement

Propriété 5 : *Théorème des gendarmes*

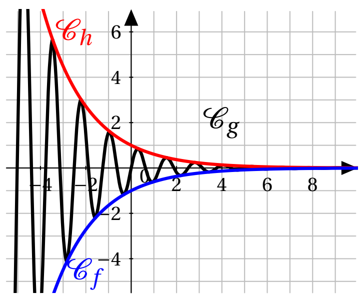
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Remarque :

On obtient un théorème analogue en $-\infty$. Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich (avec la fonction g dans le rôle de la tranche de cheddar!).



VI. Limite de la fonction exponentielle

Propriété 6 :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration : *Exigible en fin de terminale*

1. Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ »
   Posons $f(x) = e^x - x$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = e^x - 1$.
   Comme $e^0 = 1$ et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$,
   il s'ensuit que $f'(x) = e^x - 1$ est positif pour tout $x > 0$.
   Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
   $f(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

   Donc pour tout $x > 0$, $f(x) > 1$.
   A fortiori, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, soit $e^x > x$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on peut conclure, par comparaison, que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ »
   Posons $Y = -x$, lorsque x tend vers $-\infty$, Y tend vers $+\infty$.
   On a alors $x = -Y$. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{Y \to +\infty} e^{-Y} = \lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{1}{e^Y} = 0$, car $\lim\limits_{Y \to +\infty} e^Y = +\infty$ ■

Propriété 7 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ »

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ est égale au nombre dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0 soit $\mathrm{e}^0 = 1$. ■

Propriété 8 : *Croissance comparée*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$

Démonstration : *Exigible en fin de terminale*

Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ »

Nous avons établi précédemment le résultat suivant : pour tout réel $X \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^X \geqslant X + 1$.
Pour tout entier naturel n et x un réel positif, posons $X = \dfrac{x}{n+1}$. L'inégalité précédente devient $\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{x}{n+1} + 1$.
Donc $\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{x}{n+1}$, or, la fonction $t \mapsto t^{n+1}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ soit $\mathrm{e}^x \geqslant kx^{n+1}$ avec $k > 0$.
On en déduit que, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} \geqslant kx$, or, $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$ car $k > 0$.
Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$. ■