❆ Chapitre 8 ❆

Limites de suites 2

I. Suite majorée, suite minorée

Définition 1:

- La suite (u_n)est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque :

- Les suites de terme général $\cos(n)$ ou $(-1)^n$ sont bornées.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Exemple 1:

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$. Démontrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

- **Initialisation :** $u_0 = 2 < 3$ La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :** Hypothèse de récurrence : Supposons qu'il existe un entier n tel que la propriété soit vraie : $u_n \leqslant 3$.
  Démontrons que : La propriété est vraie au rang $n+1$: $u_{n+1} \leqslant 3$.
  On a : $u_n \leqslant 3$ donc $\frac{1}{3}u_n \leqslant \frac{3}{3} = 1$et donc $\frac{1}{3}u_n + 2 \leqslant 1 + 2 = 3$.On a donc : $u_{n+1} \leqslant 3$
- **Conclusion :** La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n \leqslant 3$.

II. Convergence des suites monotones

Propriété 1 :

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors la suite (u_n) est majorée par ℓ.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors la suite (u_n) est majorée par ℓ. »

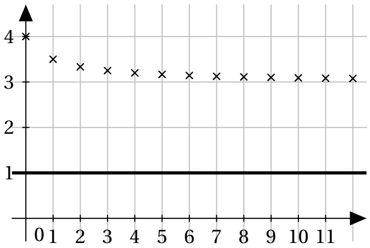
Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un entier p, tel que $u_p > \ell$. »
L'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_p[$ contient ℓ.
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
Donc l'intervalle $]\ell - 1; u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).
Comme (u_n) est croissante : $u_n \geqslant u_p$ pour $n > p$.
Donc si $n > p$, alors $u_n \notin]\ell - 1; u_p[$(2).
(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > \ell$.
Et donc la suite (u_n) est majorée par ℓ. ■

Propriété 2 : *Admise*

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-contre, la suite décroissante est minorée par 1. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 1 mais n'est pas nécessairement égale à 1.



Propriété 3 :

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$. »

Soit un réel a. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.
La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a $u_n \geqslant u_p$.
Donc pour tout $n > p$, on a $u_n > a$.
Et donc à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a ; +\infty[$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. ■
Démonstration analogue pour une suite décroissante et non minorée.