❉ Chapitre 5 ❉

Loi binomiale

I. Succession d'épreuves indépendantes

Définition 1:

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... Ω_n.
L'univers associé à cette succession de n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$.

Exemple 1:

On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.
- L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est $\{1;2;3;4\}\times\{1;2;3;4;5;6\}\times\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.
- $\{2;5;7\}$, par exemple est une issue associée à cette succession de trois épreuves indépendantes, elle correspond à l'obtention d'un 2 au premier dé, d'un 5 au deuxième et d'un 7 au troisième.

Propriété 1 :

Soit une succession de n épreuves indépendantes.
La probabilité d'obtenir une issue $(x_1;x_2;...;x_n)$ est $p\big((x_1;x_2;...;x_n)\big) = p(x_1)\times p(x_2)\times ...\times p(x_n)$.

Exemple 2:

Dans l'exemple précédent, la probabilité de $\{2;5;7\}$ est $p(\{2;5;7\}) = p(2)\times p(5)\times p(7) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{192}$

Remarque :

Dans le cas ou les expérience ne sont pas indépendantes, on les représente à l'aide d'un arbre (Voir le chapitre Probabilité conditionnelle)

II. Loi de Bernoulli

1. Épreuve de Bernoulli

Définition 2:

On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire dont l'univers compte deux issues.
Traditionnellement l'une est appelée « succès » et l'autre « échec ».

Remarque :

Les dénomination de « succès » et d' « échec » sont historiques et ne doivent pas être interprétées systématiquement !

Définition 3:

On appelle **loi de probabilité de Bernoulli** (ou **loi de Bernoulli**) la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli.
A l'issue « succès » on associe la valeur 1 de probabilité p et à l'issue « échec » on associe la valeur 0 de probabilité $q = 1 - p$.
On dit alors que la loi de Bernoulli est une **loi de Bernoulli de paramètre** p.

Une loi de Bernoulli est donc parfaitement définie par un tableau du type :

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1-p$

2. Espérance et variance d'une loi de Bernoulli

Propriété 2 :

L'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $E = p$

La variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $V = p(1-p) = pq$

Démonstration :

- Propriété à démontrer : « L'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $E = p$ »

  Dans le cous de première sur les variables aléatoires réelles, on a vu que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

  Donc l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $E = p$. ■

- Propriété à démontrer : « La variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $V = p(1-p) = pq$ »

  Dans le cous de première sur les variables aléatoires réelles, on a vu que :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 \\ &= p \times (1-p)^2 + (1-p) \times (0-p)^2 \quad = \quad p \times (1-p)^2 + p^2 \times (1-p) \\ &= p(1-p)(1-p+p) \quad = \quad p(1-p) \end{aligned}$$

  Donc la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $V = p(1-p)$. ■

III. Loi binomiale

1. Schéma de Bernoulli

Définition 4:

On appelle **schéma de Bernoulli**, la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Définition 5:

A un schéma de Bernoulli, on associe la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus. X peut prendre toutes les valeurs entières inférieures ou égales à n.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p, on la note : $\mathscr{B}(n; p)$.

Exemple 3:

On effectue n lancers d'une pièces de monnaie **équilibrée**. Chaque lancer est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Le nombre de « PILE »obtenu à l'issue des n lancers suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

Propriété 3 :

On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$
Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on a :

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \text{et} \quad p(X\leqslant k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

Démonstration : *Exigible en fin de terminale*

Propriété à démontrer : « $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ »

Sur un arbre représentant le schéma de Bernoulli associé à X, chaque chemin (de n branches) correspondant à k succès « contient » k branches dont les pondérations sont p et $n-k$ branches dont les pondérations sont $1-p$: la probabilité lui étant associée est donc $p^k(1-p)^{n-k}$.

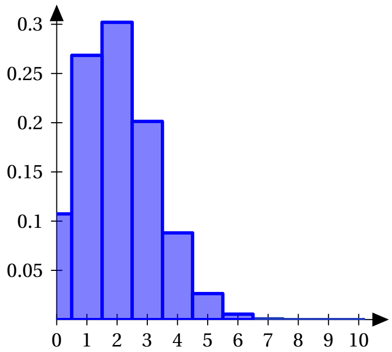
Le nombre de chemins correspondant à k succès est égal au nombre de façons de placer k pondérations p sur n branches soit $\binom{n}{k}$. Il en résulte que la probabilité d'obtenir k succès est $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. ■

2. Représentation graphique

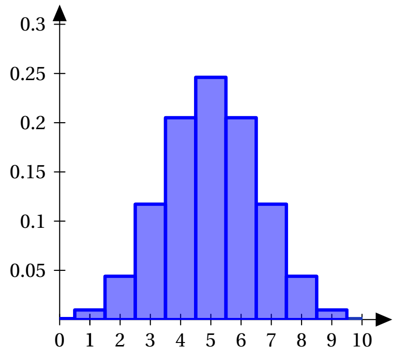
On représente la loi Binomiale à l'aide d'un diagramme en bâtons, en indiquant les nombres de succès en abscisses et les probabilités des événements $\{X=k\}$ en ordonnées.

Exemple 4:

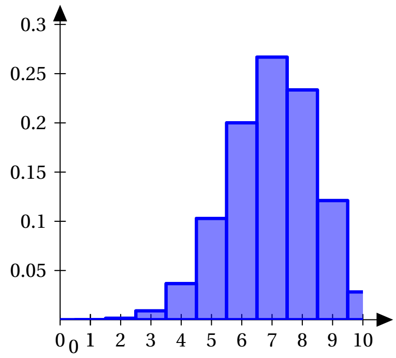
Pour $n=10$ et différentes valeurs de p.



Pour $p=0.2$



Pour $p=0.5$



Pour $p=0.7$

3. Espérance et variance d'une loi Binomiale

Propriété 4 :

L'espérance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ vaut $E=np$
La variance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ vaut $V=np(1-p)$

Remarque :

On obtient donc l'espérance et la variance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ à partir de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p en les multipliant respectivement par n.