❄ Chapitre 14 ❄

Primitive et équation différentielle

I. Équation différentielle $y' = f$

Dans toute cette partie, f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.

1. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1:

Soit F une fonction définie sur I. on dit que F est un primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$. on dit alors que F est solution de l'équation $y' = f$, appelée équation différentielle, dont l'inconnue est la fonction y.

Exemple 1:

Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^3 + 6$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3x^2$ d'inconnue y. Ces deux fonctions sont donc des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 3x^2$.

Propriété 1 : *Admise*

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque :

Certaines fonctions comme la fonction $f : x \longmapsto ae^{-x^2}$, sont continues sur $\mathbb{R}$, donc admettent des primitives sur $\mathbb{R}$, mais n'ont pas de primitive « explicite »à l'aide des fonctions usuelles.

Propriété 2 :

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. »

Soient y_1 et y_2 deux solutions sur I de $(E) : y' = f$.
On définit sur I la fonction g par $g(x) = y_2(x) - y_1(x)$.
Par hypothèse, y_1 et y_2 sont dérivables sur I et on a $y_1' = f$ et $y_2' = f$.
Par conséquent, $g = y_2 - y_1$ est aussi dérivable sur I et $g' = y_2' - y_1' = 0$.
On en déduit que g est constante sur I. Il existe donc un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $g(x) = k$ soit $y_2(x) - y_1(x) = k$ donc $y_2(x) = y_1(x) + k$, d'où le résultat. ■

Propriété 3 :

Soient x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque. L'équation différentielle $(E) : y' = f$ admet une unique solution F sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « L'équation différentielle $(E) : y' = f$ admet une unique solution F sur I telle que $F(x_0) = y_0$ »

f est continue et admet donc une primitive G sur I : G est solution de (E).
Les fonctions $x \mapsto G(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$, sont dérivables sur I de dérivée G', elles sont donc aussi des primitives de f sur I et donc des solutions de (E).
La condition $F(x_0) = y_0$ équivaut à$G(x_0) + k = y_0 \iff k = y_0 - G(x_0)$.
Ainsi la valeur de k est unique et fixée par la condition initiale.
D'où l'unicité de la solution F de (E) définie sur I par $F(x) = G(x) + y_0 - (G(x_0))$. ■

Méthode 1 : *Résolution d'une équation différentielle*

Déterminer la solution F de l'équation différentielle $(E) : y' = \mathrm{e}^{2x}$ vérifiant $F(0) = -1$.

1. On cherche une primitive G de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$:
   Soit $G(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Ainsi, G est une solution de (E).
2. On utilise la Propriété 2 en posant $F(x) = G(x) + k$:
   La solution cherchée est donc de la forme $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On calcule k avec la condition initiale :
   Comme $F(0) = -1$, on a $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{0} + k = -1 \Longleftrightarrow k = -\dfrac{3}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{3}{2}$.

2. Primitives des fonctions de référence

A l'aide des dérivées des fonctions de référence, on obtient le tableau suivant des primitives :

Fonction f	Primitive F	f définie sur
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ et $n \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x) + k$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$

Propriété 4 :

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a;b]$ alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- λF est une primitive de λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

- Propriété à démontrer : « $F + G$ est une primitive de $f + g$ »
  $(F+G)' = F' + G' = f + g$ ■
- Propriété à démontrer : « λF est une primitive de λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$ »
  $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$ ■

Méthode 2 :

Résoudre l'équation $(E) : y' = x^2 + \cos(x)$ d'inconnue y définie sur $\mathbb{R}$.

1. On vérifie que la fonction f est continue et admet donc des primitives :
   $f : x \mapsto x^2 + \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et admet donc des primitives.
2. On utilise le tableau des primitives :
   Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et une primitive de $x \mapsto \cos x$ est $x \mapsto \sin x$
   Donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \sin x$ est une primitive de f
3. Les solutions de l'équation sont toutes les primitives, il faut donc rajouter une constante :
   Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + \sin x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

3. Primitives des fonctions de la forme $u' \times (v' \circ u)$

Propriété 5 :

Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
Alors $v \circ u$ est une primitive sur I de $u' \times (v' \circ u)$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $v \circ u$ est une primitive sur I de $u' \times (v' \circ u)$ »

Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$. D'où le résultat. ■

Exemple 2:

Résolvons l'équation différentielle $(E) : y' = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ d'inconnue y.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
On a : $f(x) = x \times \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$
On pose $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$.
On pose $v(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x \times v'(x^2+1) = \dfrac{1}{2} \times u'(x) \times (v' \circ u)(x)$.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto -\dfrac{1}{2(x^2+1)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

II. Équations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

Dans toutes cette partie, a et b sont des réels et f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Définition 2:

L'équation différentielle $(E_0) : y' = ay$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$, est appelé équation différentielle linéaire homogène de premier ordre à coefficient constant.

Propriété 6 :

1. Les solutions de $(E_0) : y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda \, \mathrm{e}\, ax$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Pour tous réels x_0 et y_0, (E_0) a une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration :

1. Propriété à démontrer : « $(E_0) : y' = ay$ a pour solution $y(x) = \lambda \, \mathrm{e}\, ax$ »

   ($\Rightarrow$) : Soient λ un réel et y une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{ax}$. Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit d'une constante par la composée d'une fonction affine et de la fonction exponentielle) et , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = \lambda a \mathrm{e}^{ax} = ay(x)$.
   Ainsi y est solution de (E_0).
   ($\Leftarrow$) : Soient y une solution de (E_0) et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
   Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ay(x)\mathrm{e}^{-ax} = ay(x)\mathrm{e}^{-ax} - ay(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$
   Donc g est une fonction constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda$ soit $y(x) = \mathrm{e}^{-ax} = \lambda$.

En conclusion, $y(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{ax}$. ■

2. Propriété à démontrer : « (E_0) a une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$ »

Soit y une solution de (E_0). D'après **1.**, il existe un réel λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

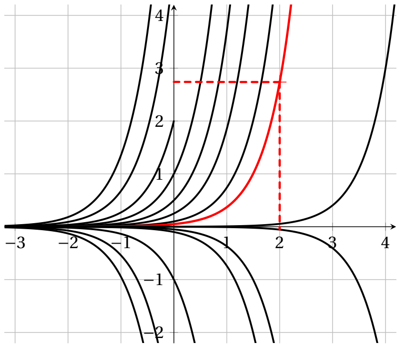
$$y(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{ax}$$

Par hypothèse, $y(x_0) = y_0 \iff \lambda\, \mathrm{e}^{ax_0} = y_0 \iff \lambda = y_0\, \mathrm{e}^{ax_0}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{-ax_0} \times \mathrm{e}^{ax} = y_0\, \mathrm{e}^{a(x-x_0)}$ et cette solution est unique. ■

Exemple 3:

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{2x}$,avec $\lambda \in \mathbb{R}$, sont les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.

L'allure des courbes représentatives de certaines solutions de (E_0) est données ci-contre.



Propriété 7 :

Soient y_1 et y_2 des solutions de (E_0) et k un réel.
La somme $y_1 + y_2$ et le produit ky_1 sont aussi des solutions de (E_0).

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $y_1 + y_2$ et le produit ky_1 sont aussi des solutions de (E_0) »

Soit $(E_0) : y' = ay$ une équation différentielle où a est un réel non nul.

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_0). Alors y_1 et y_2 sont dérivables sur I et donc leur somme $y_1 + y_2$ l'est aussi. Et, pour tout $x \in I$, $\left(y_1 + y_2\right)'(x) = y_1'(x) + y_2'(x) = ay_1(x) + ay_2(x)$, car y_1 et y_2 sont solutions de (E_0), d'où, pour tout $x \in I$, $\left(y_1 + y_2\right)'(x) = a\left(y_1(x) + y_2(x)\right) = a\left(y_1 + y_2\right)(x)$. La fonction $y_1 + y_2$ est donc aussi une solution de (E_0).

Soient y une solution de (E_0) et k un réel. Alors y est dérivable sur I et donc le produit ky l'est aussi. Et, pour tout $x \in I$, $\left(ky\right)'(x) = ky'(x) = kay(x)$, car y est solution de (E_0), d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(ky\right)'(x) = a\left(ky\right)(x)$. La fonction ky est donc aussi une solution de (E_0).

Exemple 4:

Résolvons l'équation différentielle $(E_0) : 2y' + 3y = 0$ avec la condition initiale $y(2) = 1$.

(E_0) peut s'écrire $y' = \dfrac{3}{2}y$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or $y(2) = 1 \iff \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \iff \lambda\, \mathrm{e}^{-3} = 1 \iff \lambda = \mathrm{e}^{3}$.
La solution cherchée est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{3-\frac{3}{2}x}$.

2. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Définition 3:

L'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant avec second membre.

Propriété 8 :

Le solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où λ est une constante réelle.

Démonstration :

Exemple 5:

Les solutions de $y' - 2y = 3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{2x} - \dfrac{3}{2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode 3 :

Déterminer la solution y de l'équation différentielle $(E) : 2y' + 3y = 2$ telle que $y(2) = -\dfrac{1}{3}$.

1. On écrit (E) sous la forme $y' = ay + b$:
   $(E) \iff y' = -\dfrac{3}{2}y + 1$. On reconnait la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = 1$. On en déduit que $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3}$.
2. On utilise la forme générale des solutions $x \mapsto \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$:
   $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + \dfrac{2}{3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
3. On calcule λ à l'aide de la condition initiale :
   $y(2) = -\dfrac{1}{3} \iff \lambda = e^3$. La fonction y recherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -e^{3-\frac{3}{2}x} + \dfrac{2}{3}$.

3. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

Définition 4:

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$ est également appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membres.

Propriété 9 :

Soit φ une solution particulière de (E).
y est une solution de (E) si, et seulement si, $y - \varphi$ est une solution de l'équation homogène associée $y' = ay$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « y est une solution de $(E) \iff y - \varphi$ est une solution de l'équation homogène associée »

($\Rightarrow$) : Soient (E) : $y' = ay + f$ une équation différentielle où $a \neq 0$ et f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit φ une fonction dérivable sur I. On suppose que φ est une solution particulière de (E), on a donc $\varphi' = a\varphi + f$.
Soit g une fonction dérivable sur I et solution de (E) : alors $g' = ag + f$. Comme g et φ sont dérivables sur I alors $g - \varphi$ l'est aussi. Et on a, pour tout $x \in I$, $\left(g - \varphi\right)'(x) = g'(x) - \varphi'(x) = ag(x) + f(x) - a\varphi(x) - f(x) = a\left(g(x) - \varphi(x)\right)$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $\left(g - \varphi\right)'(x) = a\left(g - \varphi\right)(x)$.
Ainsi $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$.

($\Leftarrow$) : Réciproquement, si $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$ alors $g = g - \varphi + \varphi$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I. On a alors, pour tout $x \in I$, $g'(x) = \left(g - \varphi\right)'(x) + \varphi'(x) = a\left(g - \varphi\right)(x) + a\varphi(x) + f(x)$, car $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$ et φ est solution de $\varphi' = a\varphi + f$.
Ainsi $g'(x) = ag(x) + f(x)$ et la fonction g est bien solution de (E).

Exemple 6:

Soit (E) l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$. on note φ une fonction affine qui est une solution particulière de (E). A l'aide de φ, résoudre (E).

On pose $\varphi(x) = mx + p$ (où m et p sont réels). En tant que fonction affine, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$.

φ est solution de (E) signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2m + 3(mx + p) = 6x + 1 \iff 2m + 3mx + 3p = 6x + 1 \iff \begin{cases} p = -1 \\ m = 2 \end{cases}$
Donc $\varphi : x \mapsto 2x - 1$ est une solution particulière de (E).

L'équation homogène associé à (E) est $2y' + 3y = 0$, soit $y' = -\dfrac{3}{2}y$, de solutions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + 2x + 1$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.