❉ Chapitre 15 ❉

Géométrie repérée dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

I. Équation paramétrique de droite

Propriété 1 :

Soit un point $A(x_A; y_A; z_A)$ appartenant à une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. $M(x; y; z)$ appartient à Δ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases}$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $M(x; y; z)$ appartient à Δ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases}$ »

$M \in \Delta \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\iff$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\\z - z_A\end{pmatrix}$ donc $M \in \Delta \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x - x_A = a \times t \\ y - y_A = b \times t \\ z - z_A = c \times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases}$

Définition 1:

Le système d'équations $\begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ.

Méthode 1 :

On se place dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1; -3; 1)$ et $B(-1; 1; 4)$.
2. Les points $C(-1; 1; 4)$ et $D(2; 4; 2)$ appartiennent-ils à (AB) ?

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB). On détermine alors ses coordonnées puis on applique la définition du cours :
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ donc, d'après le résultat du cours : $\begin{cases} x = 1 - 2 \times t \\ y = -3 + 4 \times t \\ z = 1 + 3 \times t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
2. On remplace x, y et z par les coordonnées du point C. Si le système admet une solution, alors C appartient à la droite. Sinon, il n'appartient pas à la droite :

   Pour $C(-1; 1; 4)$, on a $\begin{cases} -1 = 1 - 2 \times t \\ 1 = -3 + 4 \times t \\ 4 = 1 + 3 \times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$
   Le système admet une solution donc le point $C \in (AB)$.

   Pour $D(2; 4; 2)$, on a $\begin{cases} 2 = 1 - 2 \times t \\ 4 = -3 + 4 \times t \\ 2 = 1 + 3 \times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{7}{4} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$
   Le système n'admet pas de solution donc le point $D \notin (AB)$.

II. Équation cartésienne

1. Équation cartésienne de sphère

Propriété 2 :
Dans un repère orthonormé, une équation de la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R est

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Démonstration :
Propriété à démontrer : « L'équation de la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$, de rayon R est $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. »

Dans un repère orthonormé, on considère un point $M(x;y;z)$ de la sphère $\mathscr{S}$. La distance entre M et Ω est donc égale à R.

$$\begin{aligned} d(M;\Omega) &= R \\ \sqrt{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2} &= R \\ (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2 &= R^2 \end{aligned}$$

■

2. Équation cartésienne du plan

Propriété 3 :
On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
2. Soient a,b,c,d quatre réels, avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. Alors $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « Un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. »

1. Soit $A(x_0;y_0;z_0)$ un point du plan $\mathscr{P}$ et $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

   Alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$.

   $$\begin{aligned} M\in\mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0 \\ &\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\ &\iff ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0 \end{aligned}$$

   En posant $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, le plan $\mathscr{P}$ est caractérisé par l'équation $ax+by+cz+d=0$.
2. Réciproquement, on considère l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$, avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.

   Comme a, b et c ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que $a\neq 0$

   Il est clair que le point $A(-\frac{d}{a};0;0)$ appartient à (E) (donc (E) est non vide).

L'équation de (E) $ax+by+cz+d=0$ équivaut à $a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+by+cz=0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$ où $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Donc l'ensemble (E) est le plan passant par A et de vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. ■

Exemple 1:

1. Une équation du plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et passant par $A(1;0;1)$ est $2x+y+2z-4=0$.
2. Le plan d'équation $-3x+2y-z+5=0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$

Méthode 2 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-5z-2=0$ et le point $I(1;0;0)$. Donner alors un vecteur normal de ce plan et indiquer si I appartient à ce plan.

1. On identifie alors les coordonnées d'un vecteur normal avec les coefficients de x, y et z : un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est donné par $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$.
2. Pour vérifier si un point appartient à un plan, on teste si ses coordonnées vérifient l'équation donnée du plan :

$$2\times1+3\times0-5\times0-2=2-2=0$$

Les coordonnées de I vérifient bien l'équation du plan $\mathscr{P}$, donc I est un point de ce plan.

III. Projection orthogonale

1. Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition 2:

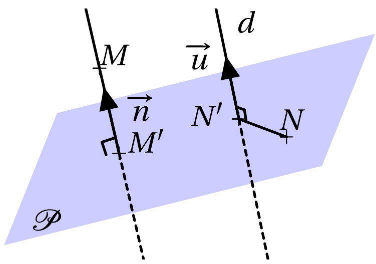
On considère un plan $\mathscr{P}$ de l'espace dont on connait un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et un point M extérieur au plan $\mathscr{P}$.
Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est l'intersection du plan et de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ passant par M.

Définition 3:

On considère une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un point M extérieur à cette droite ; le projeté orthogonal de M sur d est l'intersection du plan normal à $\overrightarrow{u}$ passant par M avec la droite d

Exemple 2:

Le point M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$ (en bleu).



Le point N' est le projeté orthogonal du point N sur la droite d.

2. Distance d'un point à un plan ou une droite

Définition 4:

Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et A un point.
La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est la plus petite des longueurs AM où $M\in\mathscr{P}$.

Propriété 4 :

Si on note H le projeté orthogonale de A sur le plan $\mathcal{P}$, alors $d(A,\mathcal{P} = AH$.

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $d(A,\mathcal{P} = AH$ »

Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$. Pour tout $M \neq H$, le triangle AHM est rectangle en H, donc $AM > AH$. Ainsi, AH est bien la plus petite des longueurs de $d(A,\mathcal{P}) = AH$. ■

Propriété 5 :

Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ un point. Si on note $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $M(x;y;z)$ un point de $\mathcal{P}$, alors :

$$d(A,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $d(A,\mathcal{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ »

On a $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\overrightarrow{n}$. Or, comme H et M sont deux points du plan $\mathcal{P}$ et que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à ce plan, on en déduit que $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{n} = 0$ et donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}$.
En utilisant la formule on obtient $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n} = AH \times \|\overrightarrow{n}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{n}\right)$.
L'angle $\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{n}\right)$ est soit nul soit plat puisque ces deux vecteurs sont colinéaires.
D'après la question précédente, $\cos\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{n}\right) = \pm 1$ et donc on a $\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}\right| = AH \times \|\overrightarrow{n}\|$.
En utilisant les coordonnées des vecteurs on obtient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = (x-x_A)\times a + (y-y_A)\times b + (z-z_A)\times c = ax+bc+cz-a\times x_A - b\times y_A - c\times z_A = -d - a\times x_A - b\times y_A - c\times z_A$.
La distance entre le point A et le plan est, par définition, la distance AH. On a $AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$. Comme $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}$ on en déduit que $d(A;\mathcal{P}) = AH = \dfrac{|x_A\times a + y_A\times b + z_A\times c + d|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.

Exemple 3:

La distance entre $A(-1;3;2)$ et $\mathcal{P} : x-3y+2z-4=0$ est :

$$d(A,\mathcal{P}) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-1-3\times3+2\times2-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14}$$