❄ Chapitre 1 ❄

Réccurence - Limite de suites 1

I. Raisonnement par récurrence

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on procède en trois étapes.

• **INITIALISATION :** On vérifie que $\left(P_{n_0}\right)$ est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0. On dit alors qu'on a **initialisé** la récurrence.
• **HÉRÉDITÉ :** On suppose qu'il existe un entier n $(n \geqslant n_0)$ pour lequel la proposition (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse - dite de **récurrence** - on démontre que la proposition (P_{n+1}) est vraie.
On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence « (P_n) vraie » est **héréditaire**.
• **CONCLUSION :** Lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut que la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n $(n \geqslant n_0)$.

Exemple 1:
Soit la suite S_n définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = 1+2+3+\cdots+n$.
Démontrons par récurrence que l'on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

II. Limite d'une suite

1. Limite finie

Définition 1:
Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite un nombre réel ℓ quand n tend vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain rang**.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ.

Propriété 1 :
Les suites définies pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, $w_n = \dfrac{1}{n^3}$ et $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0.

2. Limite infinie

Définition 2:
Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ **quand** n **tend vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain rang**.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.

Propriété 2 :
Les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$ et $t_n = \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.

Définition 3:
Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite** $-\infty$ **quand** n **tend vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain rang**.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $-\infty$.

III. Limites et comparaison

1. Théorème de comparaison

Propriété 3 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 :

- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration : *Exigible en fin de terminale*

Démontrons que si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Soit un nombre réel A. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc d'après la définition précédente, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.

On a donc pour tout $n \geqslant n_1$, $A < u_n$.

A partir d'un certain rang, que l'on note n_2, on a $u_n \leqslant v_n$.

Ainsi pour tout $n \geqslant max(n_1;n_2)$, on a $A < u_n < v_n$.

On en déduit que l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $max(n1;n2)$.

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

On procédera de même pour démontrer que si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. ■

2. Théorème d'encadrement dit « Théorème des gendarmes »

Propriété 4 : *Théorème des gendarmes*

Soit les suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant ℓ.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2.

A partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

Ainsi pour tout $n \geqslant max(n_1;n_2;n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n).

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ■

IV. Opérations et limites

1. Limite d'une somme

limite de (u_n)	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
limite de (v_n)	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de (u_n+v_n)	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	?

2. Limite d'un produit

limite de (u_n)	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
limite de (v_n)	ℓ'	∞	∞	∞
limite de $(u_n v_n)$	$\ell\ell'$	∞	∞	?

3. Limite d'un quotient

limite de (u_n)	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$ ou ∞	∞	$\pm\infty$	0
limite de (v_n)	$\ell' \neq 0$	∞	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	?	?

V. Limite de la suite q^n

Propriété 5 : *Inégalité de Bernoulli*

Pour tout $x \geqslant 0$, et pour tout $n \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Démonstration :

Voir DM1 : Récurrence

Propriété 6 :

Soit q un nombre réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Remarque :

Si $q \leqslant -1$ alors (q^n) n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$ et si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

Démonstration : *Exigible en fin de terminale*

On raisonne par disjonction des cas :

- Si $q = 0$. Pour tout $n > 1$, $0^n = 0$, donc (0^n) tend vers 0.
- Si $q = 1$. Pour tout $n > 1$, $1^n = 1$, donc (1^n) tend vers 1
- Si $q > 1$. D'après l'inégalité de Bernoulli,$q^n > 1 + n(q-1)$, (avec $x = (q-1)$)
  Comme $q - 1 > 0$, on a clairement $\lim\limits_{n\to+\infty} q - 1 = +\infty$, et par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, (et $q \neq 0$), alors $\dfrac{1}{|q|} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{|q|^n} = +\infty$. D'après les résultats sur les opérations, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$. Ayant l'inégalité $-|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$
  On conclut via le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \neq -1$, la suite (q^n) prend alternativement ses valeurs dans $[1;+\infty[$ et dans $]-\infty;-1]$.Elle diverge donc et n'a pas de limite ■