❉ Chapitre 11 ❉

Somme de variables aléatoires

I. Somme de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, on considérera une expérience aléatoire dont onn notera Ω l'univers des possibles. on supposera cet univers fini. On notera P une probabilité sur Ω.

Définition 1:

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω et a un nombre réel. On peut définir une variable aléatoire Y telle que, pour tout élément $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = aX(\omega)$. On note $Y = aX$.

Exemple 1:

On lance un dé équilibré à six faces et on joue au jeu suivant : le nombre de points obtenus est le résultat du dé multiplié par 5.
En notant respectivement X et Y les variables aléatoires correspondant au résultat du dé et aux points obtenus, on a $Y = 5X$.

Définition 2:

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω.
On peut définir une variable aléatoire Z telle que, pour tout élément $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$. Cette variable aléatoire est appelée somme de variables aléatoires X et Y. On note $Z = X + Y$.

Exemple 2:

On lance 5 dés équilibrés à six faces et on compte la somme des nombres obtenues.
Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme.
Alors, on peut écrire X sous la forme $X = X_1 + \cdots + X_5$ où pour tout $k \in \{1;2;3;4;5\}$, X_k correspond au résultat du dé numéro k.

II. Espérance et variance d'une somme de variables aléatoires

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;...;\omega_n\}$ et on note $\{x_1;x_2;...;x_p\}$ l'ensemble des valeurs prises pas X ou n et p sont des entiers naturels non nuls.

1. Espérance d'une somme de variables aléatoires

Propriété 1 : *Admise*

En reprenant les notations précédentes, on a $E(X) = \sum_{i=0}^{n} X(\omega_i)P(\{\omega_i\})$.

Exemple 3:

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) = X(1)P(\{1\}) + ... + X(6)P(\{6\}) = (-6) \times \frac{1}{6} + ... + 2 \times \frac{1}{6} = -2€$$

Propriété 2 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ »

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur Ω tel que $Z = X + Y$.
On a alors $E(X+Y) = E(Z) = \sum_{i=0}^{n} Z(\omega_i)P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=0}^{n} (X+Y)(\omega_i)P(\{\omega_i\})$.
On a par ailleurs $(X+Y)(\omega_i) = X(\omega_i) + Y(\omega_i)$.
Donc $E(X+Y) = \sum_{i=0}^{n} (X)(\omega_i)P(\{\omega_i\}) + \sum_{i=0}^{n} Y(\omega_i)P(\{\omega_i\})$.
D'où $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ en identifiant les deux sommes précédentes à $E(X)$ et $E(Y)$. ■

Propriété 3 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $E(aX) = aE(X)$ »

Pour $a = 0$ la propriété est évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1;...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1;...ax_n$.
Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_iP(aX = ax_i)$.
Or $aX = ax_i$ si, et seulement si, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi, $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_iP(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_iP(X = x_i) = aE(X)$ ■

Propriété à démontrer : « $E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$ »

On a $E(aX+Y) = E(aX) + E(Y)$ donc $E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$. ■

Exemple 4:

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face,on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculons $E(X)$.

- Soient X_1 la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la première étape et X_2 la varaible aléatoire correspondant au gain obtenu à la seconde étape. Dans ces conditions, on a $X = X_1 + X_2$.
- On étudie ensuite les lois de probabilité de X_1 et X_2.

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = 2$.
- En conclusion on a $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = -1 + 2 = 1$

2. Variance d'une somme de variables aléatoires

Définition 3:

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Propriété 4 :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $V(aX) = a^2 V(X)$ »

Si $a = 0$, la propriété est évidente.
On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1; \ldots x_n$ les valeurs prises pas X, alors aX prend les valeurs $ax_1; \ldots ax_n$.
Par définition, $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - E(aX))^2 P(aX_i = ax_i)$
Donc $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - aE(X))^2 P(aX_i = ax_i)$
D'où $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} a^2 (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$
Ainsi $V(aX) = a^2 \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i) = a^2 V(X)$ ■

Exemple 5:

On considère une variable aléatoire X vérifiant $V(X) = 16$, alors $V(4X) = 4^2 V(X) = 16 \times 16 = 256$

Définition 4:

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n varaibles aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, \ldots E_n$. On dit que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$:

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \ldots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \ldots \times P(X_n = x_n)$$

Propriété 5 : *Admise*

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemple 6:

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exercice précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(x_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(x_2) = 2$ donc $V(X_1) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On a donc $V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 50 + 16 = 66$.

III. Applications

1. Applications à la loi binomiale

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et p désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Définition 5:
Deux variables aléatoires sont dites identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Propriété 6 :
Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Propriété 7 :
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$
3. $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration :
Propriété à démontrer : « $E(X) = np$ »

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1;...;n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
Or, $E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$ ■

Propriété à démontrer : « $V(X) = np(1-p)$ »

Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n) = p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$$

■

Propriété à démontrer : « $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)}$ »

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$ ■

Exemple 7:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.
On a $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
On a $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$
On a $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3,2} = 1,789$

2. Échantillons de n variables aléatoire identiques et indépendantes

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$ et $X_1, ...X_n$, n variables aléatoires définies sur Ω supposées indépendantes et identiquement distribuées.
On note $S_n = X_1 + ... + X_n$ la somme de ces n variables aléatoires et $M_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$ la moyenne de ces n variables aléatoires.

Propriété 8 :
Pour tout $k \in \{1;...;n\}$, on a :

1. $E(S_n) = nE(X_k)$
2. $V(S_n) = nV(X_k)$
3. $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_k)$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $E(S_n) = nE(X_k)$ »

La linéarité de l'espérance donne $E(S_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$. Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, pour tout $k \in \{1;\dots;n\}$, $E(S_n) = nE(X_k)$ ■

Propriété à démontrer : « $V(S_n) = nV(X_k)$ »

De la même manière, les variables aléatoires $X_1, \dots X_n$ étant indépendantes, on obtient, pour tout $k \in \{1;\dots;n\}$, $V(S_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = nV(X_k)$ ■

Propriété à démontrer : « $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_k)$ »

$\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X_k)} = \sqrt{n}\sqrt{V(X_k)} = \sqrt{n}\sigma(X_k)$ ■

Propriété 9 :

Pour tout $k \in \{1;\dots;n\}$, on a :

1. $E(M_n) = E(X_k)$
2. $V(M_n) = \dfrac{V(X_k)}{n}$
3. $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$

Démonstration :

Propriété à démontrer : « $E(M_n) = E(X_k)$ »

Soit $k \in \{1;\dots;n\}$, la linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n)}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X_k) = E(X_k)$$

■

Propriété à démontrer : « $V(M_n) = \dfrac{V(X_k)}{n}$ »

On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n^2} \times nV(X_k) = \dfrac{V(X_k)}{n}$ ■

Propriété à démontrer : « $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$ »

$\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\dfrac{V(X_k)}{n}} = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$ ■

Remarque :

$E(M_n)$ peut s'interpréter comme ceci : en prenant un grand nombre de fois des échantillons de taille n et en calculant à chaque fois la moyenne de l'échantillon obtenu, la moyenne théorique de ces résultats est égale à $E(x_k)$.

Exemple 8:

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1;\dots;5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

1. Déterminons E(X) :
   On a $E(X) = 5E(X_1)$.
   Or la loi de probabilités de X_1 est :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   On a $E(X_1) = 1 \times \dfrac{1}{6} + \dots + 6 \times \dfrac{1}{6} = 3,5$. Donc $E(X) = 5E(x_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
2. Déterminons V(X) :
   Les variables aléatoires $X_1;\dots;X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.
   Or $V(X_1) = \dfrac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \dots + \dfrac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \dfrac{35}{12}$, d'où $V(X) = 5 \times \dfrac{35}{12} = \dfrac{175}{12}$.