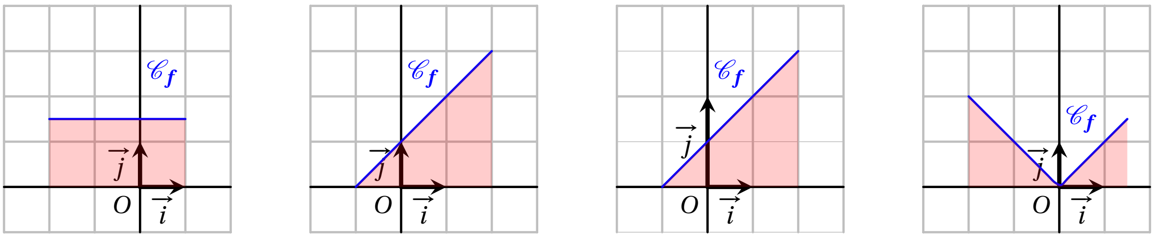
Calcul intégral

Aspect graphique

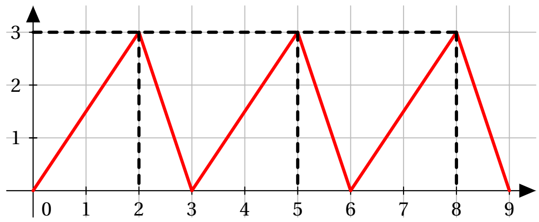
Exercice 1 Soit $\mathscr{D}$ un domaine d'aire 3 u.a. dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm pour l'axe des abscisse et 1 cm pour l'axe des ordonnées. Quelle est l'aire de $\mathscr{D}$ en cm²?

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, écrire ou donner :

1. l'expression de la fonction f représentée en bleue;
2. la description du domaine coloré en rouge;
3. l'aire de ce domaine à l'aide d'une intégrale;
4. l'aire de ce domaine, en u.a.



Exercice 3 Voici la courbe représentative d'une fonction f sur $[0;9]$:



1. Calculer l'aire sous la courbe pour x appartenant à $[0;3]$, puis pour x appartenant à $[0;9]$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 4 Calculer $A = \displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x$ $\quad B = \displaystyle\int_{-1}^3 2\,\mathrm{d}x$ $\quad C = \displaystyle\int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$

Exercice 5

1. Dans un repère orthonormé, le point M a pour coordonnées $(x; y)$.
   - **a.** Quelle est la valeur de OM^2 ?
   - **b.** Donner une équation du cercle de centre O et de rayon 1.
   - **c.** En déduire l'équation du demi-cercle de même centre, de même rayon et situé au-dessus de (Ox).
2. En admettant que la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1;1]$. Justifier l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Primitive et intégrale

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes :

1. $T = \displaystyle\int_{-2}^1 \left(-x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{d}x$
2. $O_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(3x^2 - 4x + 5\right)\mathrm{d}x$
3. $C = \displaystyle\int_1^3 \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $Q = \displaystyle\int_{-2}^2 \left(3t^2 - 1\right)\mathrm{d}t$
5. $U = \displaystyle\int_1^3 \left(2u - 1 + \frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$
6. $E = \displaystyle\int_0^{2013} \frac{4}{x^{2014}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7 Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $C = \displaystyle\int_{-1}^4 (x-1)^2\,\mathrm{d}x$
2. $H = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t)\,\mathrm{d}t$
4. $T = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$
5. $P = \displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $O = \displaystyle\int_{-2}^1 u(u^2-1)^2\,\mathrm{d}u$
7. $R = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$
8. $T = \displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8 On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
2. En remarquant que $x = x+1-1$, démontrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x+1}$ où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^{x^2-2x}$

1. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 10 En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer la valeur de : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 Calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Propriété de l'intégrale

Exercice 12 Soient f et g deux fonctions continues sur $[-3;4]$ telles que :

$$\int_{-3}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = -2 \qquad \int_{1}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = 3 \quad \text{et} \quad \int_{-3}^{4} g(t)\,\mathrm{d}t = -1 \qquad \int_{1}^{4} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Donner la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_{-3}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_{1}^{4} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ 4. $\displaystyle\int_{1}^{4} (f-g)(t)\,\mathrm{d}t$ 5. $\displaystyle\int_{1}^{4} (4f-3g)(t)\,\mathrm{d}t$ 6. $\displaystyle\int_{-3}^{4} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 Réduire chacune des expressions suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1. $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_0^1 (e^{x^2}-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{-2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$ 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x - \int_3^1 \mathrm{d}u + \int_3^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ 6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 14 Soit f et g deux fonctions continues sur $[1;2]$ telles que : $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ et $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -3$.

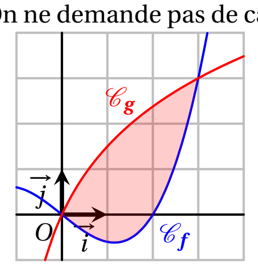
1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \big(5f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x)\right)\mathrm{d}x$

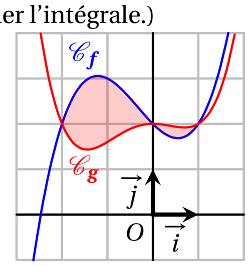
Exercice 15 On modélise l'évolution du stock d'une entreprise durant 10 jours par la fonction f définie sur $[0;10]$ par : $f(t) = \begin{cases} 500t+100 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ -125t+1350 & \text{si} \quad 2 < t \leqslant 10 \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$

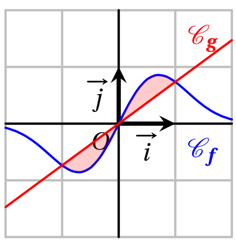
Exercice 16 Calculer astucieusement les intégrales suivantes :

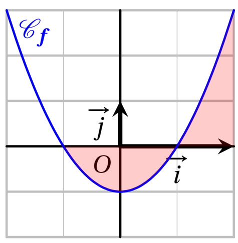
$$I = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{e^{-x}}\right)\mathrm{d}x \qquad\qquad J = \int_1^2 2xe^{x^2+x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 e^{x^2+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 17 Dans chacun des cas suivants, exprimer l'aire du domaine colorié sous la forme d'une intégrale. (On ne demande pas de calculer l'intégrale.)

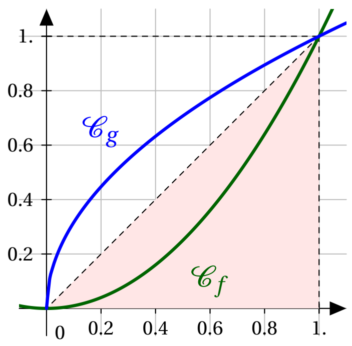








Exercice 18 $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentent sur $[0;1]$ les fonctions f et g définies par :



$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

On sait que ces courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1. Calculer l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x appartenant à $[0;1]$.
2. Déterminer l'aire de la partie coloriée en rouge.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 19 Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ et $I = [1;4]$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2+9\right)^2}$ et $I = [-1;1]$.

Exercice 20 Une entreprise fabrique entre 300 et 1500 pièces par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est modélisé par la fonction f définie sur $[3;15]$ par $f(x) = -200x^2 + 3600x - 9000$.
Lorsque l'entreprise produit entre 300 et 1500 pièces, la valeur moyenne de son bénéfice est donnée par la valeur moyenne de f sur $[3;15]$.
Déterminer une valeur approchée, arrondie à un euro près, de ce bénéfice moyen.

Intégration par partie

Exercice 21 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 4x\,\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{4+5x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 -x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 2x^3\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x-9)^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 23 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^3 3x^2\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^2 4(2x+1)^3\,\mathrm{e}^{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 24

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 25 Calculer les intégrales données à l'aide d'une double intégration par partie :

1. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{3}{2}x^5\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-1}^0 x^5\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^3 x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4}\,\mathrm{d}x$