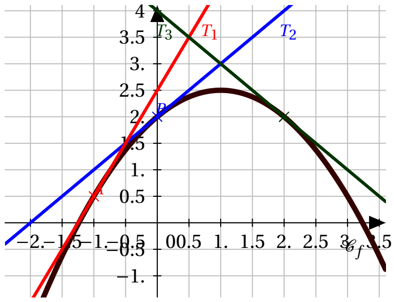
Fonctions dérivées

Dérivées et aspect graphique



Exercice 1 On a représenté la courbe représentative d'une fonction f et certaines de ses tangentes.

1. **a.** Rappeler l'interprétation graphique de $f'(2)$.
   b. Lire graphiquement $f'(2)$.
2. Lire de même $f'(-1)$ et $f'(0)$.
3. Déterminer l'équation réduite des tangentes T_1, T_2 et T_3.

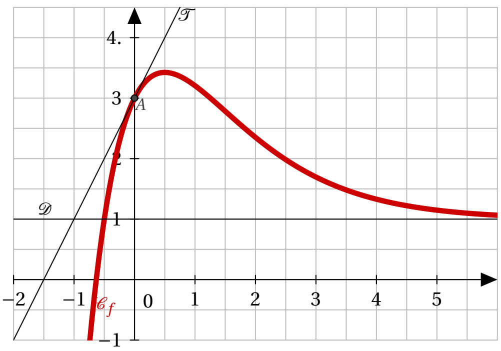
Exercice 2 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 5x$ sur $\mathbb{R}$. On admet que sa dérivée est donnée sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x - 5$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
2. Déterminer $f'(1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
3. Tracer les tangentes à $\mathscr{C}$ connues grâce aux résultats de la question précédente.

Exercice 3 On considère les courbes $\mathscr{C}_1 : y = x^2 + 2x$ et $\mathscr{C}_2 : y = -x^2 + 6x - 2$.

1. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur la calculatrice.
2. Montrer qu'elles n'ont qu'un point commun A.
3. Montrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente en A. On dit alors que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes en A.
4. Donner l'équation réduite de cette tangente.

Exercice 4 La courbe suivante est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de f. La tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;3)$ passe par le point $B(1;5)$.



1. En utilisant les données et le graphique, préciser $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
3. On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par une expression de la forme : $f(x) = 1 + \dfrac{ax+b}{e^x}$ où a et b sont deux réels.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a , b et x.
   b. A l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout réel x : $f(x) = 1 + \dfrac{4x+2}{e^x}$.

Application à l'étude de fonction

Exercice 5 La fonction f est définie pour tout x réel par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. **a.** La fonction possède-t-elle des extrema locaux ?
   b. La fonction possède-t-elle des extrema (globaux) ?

Exercice 6 La fonction f est définie pour tout $x \in]2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. **a.** La fonction possède-t-elle des extrema locaux ?
   b. La fonction possède-t-elle des extrema (globaux) ?

Exercice 7 Quelle somme minimale peut-on obtenir en ajoutant un nombre strictement positif et son inverse ?

Exercice 8 Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 €.

Partie A : Coût de production unitaire

Le coût de production unitaire $U(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est $U(x) = x - 10 + \dfrac{900}{x}$ pour $x \in I = [10;100]$.

1. a. Étudier la fonction U sur I et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ en prenant pour unités $1cm$ pour 5 objets et $1cm$ pour 10 €.
   b. Déterminer pour quelle production le coût unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.
2. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production unitaire inférieur ou égal à 80 €.

Partie B : Étude du bénéfice

1. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction $B(x)$.
3. Déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

Exercice 9 Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume $1dm^3$ ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$. L'unité de longueur est le décimètre.

1. Justifier que $y = \dfrac{1}{x^2}$.
2. En déduire que l'aire totale de la boîte est : $S(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$.
3. Montrer que pour $x > 0$, $S'(x) = \dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.
4. a. En déduire le sens de variation de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b. Donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.

Fonction composées

Exercice 10 Soit f une fonction définie par $f(x)$. Déterminer son ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$, puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^3 - 3 + 3\sqrt{x}$
2. $f(x) = \left(4x^3 + 2x - 1\right)^4$
3. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
4. $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^3$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{5x-2}$
6. $f(x) = \left(\sqrt{4x}\right)^3$

Exercice 11 Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère.
Calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$, puis donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 1}$ $x_0 = 1$
2. $f(x) = (2x-1)^{11}$ $x_0 = 0$
3. $f(x) = 3x - 2\sqrt{-x} - \dfrac{5}{x}$ $x_0 = -1$
4. $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ $x_0 = 2$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $x_0 = 1$

Exercice 12 Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de chaque fonction et calculer sa dérivée sur $\mathscr{D}'$:

1. $f : x \mapsto \sqrt{3x - 7}$
2. $g : x \mapsto (5x^3 - 3)^2$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+6)^3}$
4. $a : x \mapsto \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^2$
5. $b : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$
6. $c : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10 - x}}$

Exercice 13 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
3. $f(x) = xe^x$
4. $f(x) = (e^x)^2$
5. $f(x) = x^2 e^x$
6. $f(x) = e^{x^2+1}$
7. $f(x) = e^{x^3+2x}$
8. $f(x) = \dfrac{e^{x^2-4}}{e^{3x+1}}$