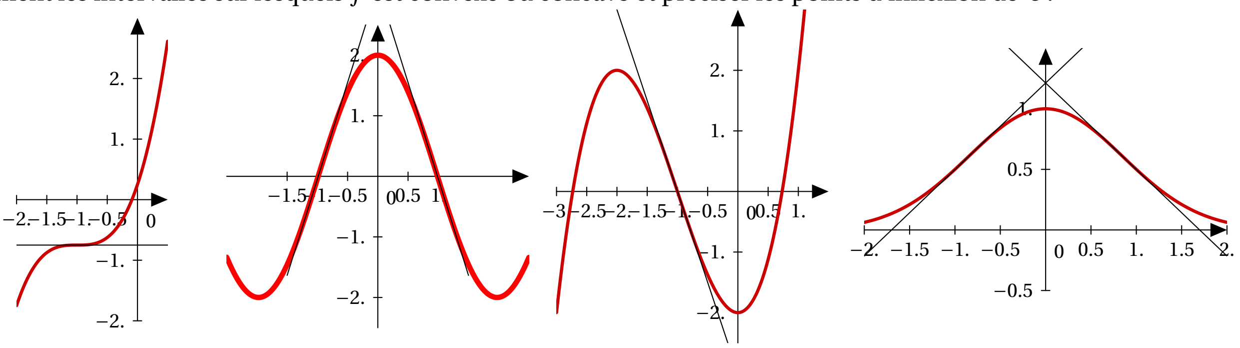
Fonction convexe, fonction concave

Exercices d'application

Exercice 1 Dans chaque cas, la fonction f, dérivable sur $[-3\,;\,3]$ est définie par sa courbe $\mathscr{C}$. Lire graphiquement les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave et préciser les points d'inflexion de $\mathscr{C}$.



Exercice 2 Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$ Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. En utilisant la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, établir que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $2\sqrt{x} \leqslant x+1$.

Exercice 3 Soit h une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{x}$ Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. En utilisant la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, établir que pour tout nombre réel $x>0$, $\dfrac{1}{x} \geqslant 2-x$.

Exercice 4 Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-8x^3+48x^2$

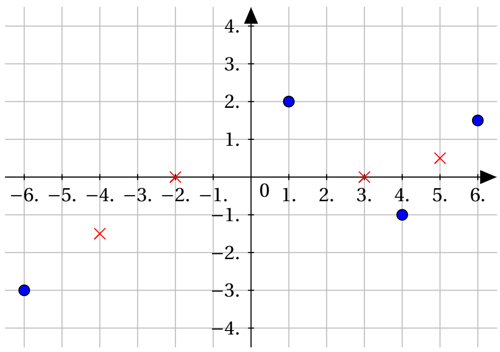
Exercice 5 Voici le tableau de variation de la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-7\,;\,5]$.

x	-7	-2	-1	5
$f'(x)$	3 ↘	0 ↗	2 ↘	1

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Déterminer la convexité de f.
3. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Exercice 6

Dans le repère ci-contre, les points et les croix appartiennent à une même courbe représentant la fonction f définie sur $[-6\,;\,6]$.
Tracer une courbe possible sachant que f est croissante sur $[-6\,;\,1]$ et sur $[4\,;\,6]$ et que chaque croix est un point d'inflexion.



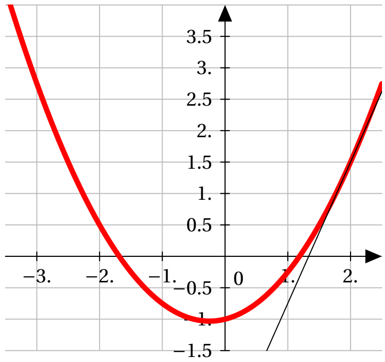
Exercice 7 Voici le tableau de signe de la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur $]-10\,;\,10[$.

x	-10		-3		1		10
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Déterminer le sens de variation de la fonction dérivée f'.
2. Déterminer la convexité de f ainsi que les abscisses d'éventuels points d'inflexion.

Exercice 8

Dans le repère ci-contre est représentée la courbe représentative de la fonction f sur $[-4;4]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x-1$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.



1. Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.
2. En déduire que, pour tout réel x de $[-4\,;\,4]$:
$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x-1 \geqslant \dfrac{11}{4}x-3$
puis que $x^2 \geqslant 4x-4$.

Exercice 9 Tracer dans un repère une courbe $\mathscr{C}$ pouvant représenter une fonction f définie sur $[-1\,;\,5]$ telle que : f est convexe sur $[1\,;\,5]$ et concave sur $[-1\,;\,1]$; $f(1)=2$; $f'(1)=-1$.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^4-2x^3-12x^2+8x+6$.

1. Conjecturer la convexité de f à l'aide de la calculatrice.
2. Déterminer le signe de $f"(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Infirmer ou confirmer la conjecture émise à la première question.

Exercice 11 Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisses 1.
3. En déduire que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$.

Exercice 12 Les propositions suivantes sont fausses. Infirmer chacune d'elle à l'aide d'un contre-exemple éventuellement graphique.

1. Si une fonction n'est pas convexe sur un intervalle alors elle est concave sur cet intervalle.
2. Une fonction peut être convexe et concave sur un intervalle.
3. Si f est une fonction convexe sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$ telle que $f(a)=f(b)=0$, alors f est positive sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 13 Soit f une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y=-2x+1$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $f(0)>0$.
2. $f(3)<-5$.
3. $f(-2)\geqslant 5$.

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+2x^2-20x+24$. On note $\mathbb{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Déterminer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.
2. Déterminer la convexité de f et préciser les éventuels points d'inflexion.
3. Déterminer les équations des tangentes T_{-4} et T_3 à la courbe $\mathbb{C}$ aux points d'abscisses $_4$ et 3.
4. Déterminer la position relative de $\mathbb{C}$ et T_{-4} sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{2}{3}\right]$.
5. Déterminer la position relative de $\mathbb{C}$ et T_3 sur l'intervalle $\left[-\dfrac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.
6. Tracer dans un repère les tangentes T_{-4} et T_3 puis la courbe $\mathbb{C}$.

Exercice 15 Les fonctions cube sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, où a, b, c et d sont des nombres réels fixés, $a\neq 0$.

1. Déterminer $f"(x)$.
2. En déduire que la convexité d'une fonction cube est indépendante des valeurs de c et d.
3. Montrer que la courbe représentative d'une fonction cube admet toujours un point d'inflexion. Préciser son abscisse x_0 en fonction de a et b.
4. Discuter de la convexité d'une fonction cube suivant les valeurs de x (on distinguera les cas $a>0$ et $a<0$).

Exercice 16 Dans une entreprise, le coût total de production, en milliers d'euros, de x milliers d'objets est donné par : $C(x) = x^3 - 12x^2 + 72x + 100$ pour $0 \leqslant x \leqslant 10$.

On définit la fonction coût marginal C_m comme la dérivée de la fonction C.

On définit la fonction coût moyen C_M sur $]0;10]$ par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. **a.** Étudier les variations de la fonction C.
   b. Tracer la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal (unités graphiques : $1cm$ pour 1 000 objets en abscisses et $1cm$ pour 50 000 €en ordonnées).
2. **a.** On dit que les rendements marginaux sont décroissants lorsque le coût marginal C_m est croissant. Étudier les variations de la fonction C_m puis déterminer le nombre d'objets à produire à partir duquel les rendements marginaux deviennent décroissants.
   b. A quoi cela correspond-il pour la fonction C ?
3. On dit que les rendements d'échelles sont décroissants lorsque le coût moyen C_M est croissant.
   On cherche à déterminer le nombre d'objets à produire à partir duquel les rendements d'échelles deviennent décroissants.
   Pour éviter l'étude de la fonction C_M on utilise la méthode graphique suivante : le nombre recherché est l'abscisse du point de la courbe de C où la tangente passe par l'origine.
   Déterminer ce nombre.
4. Représenter les courbes des fonctions C_m et C_M dans le même repère que celui de la fonction C et vérifier que la méthode graphique précédente est correcte.

Exercice 17 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

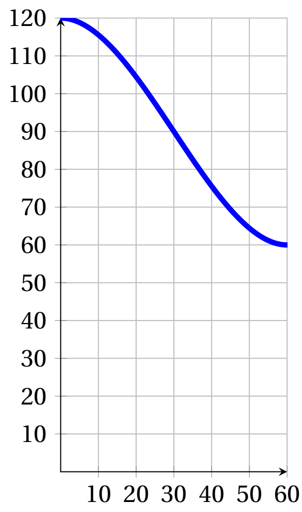
1. Si f est une fonction convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie $f'(0) = 0$, alors pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$.
2. Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f'(x) = x^2$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. Toutes les fonctions convexes sur un intervalle I, dont la courbe est tangente à l'axe des abscisses vérifient $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x de I.
4. Si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 0$ alors pour tout réel x positif, on a $f(x) \geqslant 0$.

Exercice 18 Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \left(x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 109x + 128\right)\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Déterminer la fonction dérivée Φ' et la fonction dérivée seconde Φ'' pour tout réel x de Φ.
2. **a.** Chercher deux racines évidentes de $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2$.
   b. Déterminer les réels a, b, et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = (x+2)(x-1)(ax^2 + bx + c)$
   c. En déduire le signe de $\Phi''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convexité de Φ et les abscisses des éventuels points d'inflexion.

Exercice 19 Une commune des Alpes demande à un ingénieur de modéliser le futur tremplin de saut a ski avec les contraintes suivantes :

- les tangentes au départ du tremplin et à l'arrivée sont horizontales ;
- la fonction qui modélise le tremplin est définie sur $[0;60]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d réels.



1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' sur $[0;60]$
   b. Déterminer les nombres dérivés de f en 0 et en 60
   c. En déduire la valeur de c ainsi qu'une expression de b en fonction de a.
2. **a.** Déterminer les images de 0 et 60 par f
   b. Déduire de ce qui précède les valeurs de a, b et d ainsi que l'expression de $f(x)$.
3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $[0;60]$
   b. Déterminer la longueur de la barre de renfort horizontale qui devra toucher le tremplin au point d'inflexion. A quelle hauteur devra-t-il être placée ?