Fonction logarithme népérien

Activités mentales

Exercice 1 Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x, l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1. $\ln x$ **2.** $\ln(3-x)$ **3.** $\ln(x+2)$ **4.** $\dfrac{1}{\ln(x^2)}$

Exercice 2 Simplifier.

1. $e^{\ln 3}$ **2.** $e^{-\ln 5}$ **3.** $e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ **4.** $\ln(e^5)$ **5.** $\ln 1+\ln e$ **6.** $\ln(e^{-2})$

Exercice 3 Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $C=\ln 7+\ln 8$ **2.** $H=\ln 20-\ln 4$ **3.** $A=-\ln 4+\ln 28$ **4.** $T=-2\ln 4$

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x=2$ **2.** $e^x=-5$ **3.** $e^x=\dfrac{1}{4}$

4. $\ln x=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **5.** $\ln x=\dfrac{\ln 5}{2}$ **6.** $\ln x=-\ln 9$

7. $(\ln x-2)(1+\ln x)=0$ **8.** $(e^x-3)(e^x+5)=0$ **9.** $(\ln x)(6-3\ln x)=0$

Exercice 5 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(x)\geqslant 1$ **2.** $\ln(x)>-2$ **3.** $\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$ **4.** $\ln(x)<3$

Propriétés algébriques

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en en 1.

2. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la position relative de $\mathscr{C}$ et T.

3. Pour tout réel $x>0$, on pose $d(x)=\ln x-x+1$.

  a. Dresser le tableau de variation de la fonction d.

  b. En déduire le signe de $d(x)$ en fonction de x.

  c. Démontrer la conjecture établie au 2.

Exercice 7 Calculer les nombres réels suivants.

1. $\ln(0,5)+\ln 2$ **2.** $3\ln 2-\ln 4$ **3.** $(\ln(e^3))^2$ **4.** $e^{\ln 2+\ln 3}$

Exercice 8 Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1. $T=e^{2\ln 3}$ **2.** $R=e^{4\ln 2}$ **3.** $U=e^{-\ln 4}$ **4.** $C=e^{-5\ln 2}$

Exercice 9 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $M=e^{\ln 6-2\ln 3}$ **2.** $A=e^{3\ln 2-\ln 4+1}$ **3.** $L=\dfrac{e^{\ln 5-1}}{e^{2+\ln 5}}$ **4.** $T=\dfrac{e^{2\ln 3-\ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

Exercice 10 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 8$ **2.** $\ln(\sqrt{2})$ **3.** $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **4.** $3\ln 2-\ln 16$

Exercice 11 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1. $\ln\left(\dfrac{81}{7}\right)$ **2.** $\ln 441$ **3.** $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$ **4.** $\ln\sqrt{21}$

Équation et inéquation

Exercice 12 Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln x = 2$
2. $\ln x = -1$
3. $3\ln x - 9 = 0$
4. $\ln(x+5) = \ln 3$
5. $\ln(x^2) = \ln 9$
6. $\ln(x^2+x) = \ln 6$

Exercice 13 Résoudre les équations suivantes :

1. $2+3\ln x = 14$;
2. $\ln(x^2) = \ln 9$;
3. $\mathrm{e}^{2-3x} = 5$;
4. $2\mathrm{e}^{2x} - 10 = 0$.
5. $\ln(2-x)+1 = 0$;
6. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$;
7. $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$.

Exercice 14

1. Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.
2. En déduire les solutions des équations suivantes :
   a. $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 15 = 0$;
   b. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

Exercice 15 Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 3 = 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^x$).
2. $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$ (on pourra poser $X = \ln x$).

Exercice 16 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(2-3x) \geqslant 0$;
2. $\ln(1-x) < 1$;
3. $\ln\left(\dfrac{3}{x}\right) > \ln 3$.
4. $2\ln(x) \geqslant \ln(2-x)$;
5. $\ln(x) + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3$;
6. $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4$.

Exercice 17 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x > 3$
2. $\mathrm{e}^x \leqslant \dfrac{1}{2}$
3. $\mathrm{e}^x < -\mathrm{e}$
4. $2\mathrm{e}^x - 3 > 9$
5. $4\mathrm{e}^x - 1 \geqslant \mathrm{e}^x + 5$
6. $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x < 0$
7. $\ln(-2x+1) \leqslant 0$
8. $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$
9. $\ln(2x-1) + 1 > 0$

Exercice 18 Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n \leqslant 10^{-2}$;
2. $(1,05)^n > 10$;
3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

Exercice 19 Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de $\dfrac{1}{5}$. Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?

Calcul de limite

Exercice 20 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)^2 - \ln x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 2x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - x^2\right)$

En utilisant un théorème de comparaison, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+105x+18)$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(8-x^3)$.

Exercice 21 Soit f la fonction définie sur $\left]0;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[\cup \left]\dfrac{1}{\mathrm{e}};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x + 1}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

Exercice 22

1. Démontrer la propriété suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. En déduire les limites suivantes.

   a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$. c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

Étude de fonction

Exercice 23 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
4. En déduire que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$ que l'on précisera.

Exercice 24 Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = 3x+5-\ln x$ 2. $f(x) = \ln x + x^4$ 3. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4\ln x$ 4. $f(x) = (\ln x)(x+1)$

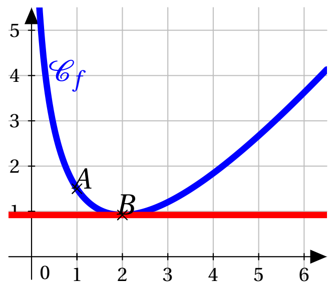
Exercice 25 Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ sur $I =]0;1[$
2. $f(x) = (\ln x)^2(3-\ln x)$ sur $I =]0;+\infty[$
3. $f(x) = (2-\ln x)(1-\ln x)$ sur $I =]0;+\infty[$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{5\ln x+2}$ sur $I =]0;+\infty[$

Exercice 26 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle I.

1. $f(x) = 2-5(\ln x)^2$ sur $I =]0;+\infty[$ 2. $f(x) = \dfrac{4}{\ln x}$ sur $I =]0;1[$ 3. $f(x) = \mathrm{e}^{2\ln x - x}$ sur $I =]0;+\infty[$

Exercice 27 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ax + b\ln x$ où a et b sont des réels.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Le point $A\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2 est horizontale.



1. Donner $f(1)$ et $f'(2)$.
2. Calculer les réels a et b.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f.

Exercice 28 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x + x^2$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
5. À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Exercice 29 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}$.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Construire $\mathscr{C}$ et son asymptote.

Fonction $\ln(u)$

Exercice 30 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(5x-3)$
2. $g : x \mapsto \ln(-8x+4)$
3. $h : x \mapsto \ln(-7x)$
4. $k : x \mapsto \ln(x^2-2x+1)$

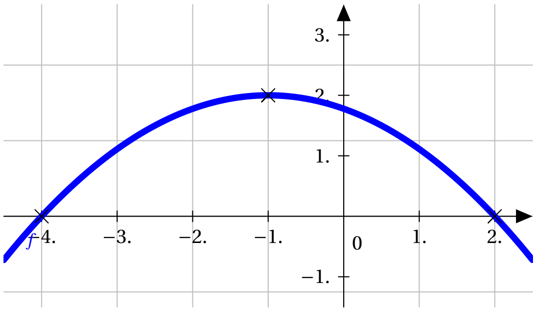
Exercice 31 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \ln(5x-1)$, $I = \left]\frac{1}{5};+\infty\right[$
2. $f(x) = \ln(9-x^2)$, $I =]-3;3[$
3. $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 32 Dans chaque cas, étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

1. $f(x) = \ln(6-2x)$, $I =]-\infty;3[$
2. $f(x) = \ln(x^2-4x+5)$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x-1)$, $I =]0;+\infty[$

Exercice 33 On donne ci-dessous la courbe représentative C_u d'une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u)$.
2. Étudier les limites de la fonction $\ln(u)$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier le sens de variation de la fonction $\ln(u)$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln(u)$.

Exercice 34 Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(3x-1)$

1. Justifier que f est bien définie sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
3. Pour tout réel $x > \frac{1}{3}$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 35 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x+1)$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f.
3. Étudier les variations de f.

Exercice 36 Soit f la fonction définie sur $]-4\,;\,4[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Pour tout réel $x \in]-4\,;\,4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ possède un élément de symétrie.
2. Étude de f sur $[0\,;\,4[$.
   a. Déterminer la limite de f en 4. En donner une conséquence graphique
   b. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,4[$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,4[$.
   d. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.
   e. Calculer l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.
3. Tracer précisément la courbe $\mathscr{C}$ en utilisant les résultats obtenus précédemment.

Logarithme et suite

Exercice 37 En 2015, la population d'une ville compte 250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2 %. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants ?

Exercice 38 Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé ?

Exercice 39 Un individu ayant une migraine a absorbé un comprimé qui contient 500 mg de paracétamol. Cette molécule a une demi-vie de 2 heures, c'est-à-dire que la moitié du produit est éliminé au bout de 2h.

Combien de temps faut-il attendre pour que 99 % du médicament ait disparu de l'organisme ?

Exercice 40 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 5,999$.

Exercice 41 Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln n - 2n$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n+2) - \ln(3n)$.

Exercice 42 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n et u_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \ln(v_n)$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est bien définie.
   b. Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n.

Problème

Exercice 43 À la mort d'un être vivant, la proportion de carbone 14 diminue au fil des années. Les archéologues peuvent estimer l'âge d'un bois ou d'un squelette en mesurant la proportion de carbone 14 présent dans l'objet préhistorique. L'âge de l'objet $A(x)$ en années est modélisé par $A(x) = -k \ln x$ où k est une constante et x est la proportion de carbone 14 restant par rapport au nombre d'atomes de départ.

1. La moitié des atomes de carbone 14 est désintégrée au bout de 5730 ans. En déduire la valeur de k (arrondir à l'unité).
2. Dans la suite, on prendra $A(x) = -8267 \ln x$.
   a. Quel est l'âge d'une coquille d'un fossile dont la proportion de carbone 14 est 0,25 ?
   b. Quelle est la proportion en carbone 14, de la momie de Xin Zhui âgée de 2170 ans ?

Exercice 44 La glycémie est le taux de glucose dans le sang. On observe la glycémie chez un individu après ingestion d'une boisson sucrée. On considère que la glycémie (en g/l) en fonction du temps écoulé (en heures) est donnée par la formule :

$$g(t) = \ln(3t+1) - t + 1 \text{ avec } t \in [0;3].$$

1. Calculer le taux de glucose dans le sang quinze minutes après l'ingestion.
2. Calculer $g'(t)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
4. À quel instant la glycémie est-elle maximale ? Que vaut alors cette glycémie ?
5. À l'aide d'une calculatrice, déterminer à quel instant la glycémie repasse à 1 g/l ?

Exercice 45 Le nombre de bactéries présentes dans une culture après t jours est donné par : $N(t) = ae^{bt}$, où a et b sont deux constantes réelles.

1. Calculer a et b sachant qu'initialement, il y a 10000 bactéries et qu'au bout de deux jours, il y a 50000 bactéries.
2. Quel sera le nombre de bactéries au bouts de 6 jours ? (arrondir à l'unité)
3. Au bout de combien de jours, la culture dépassera-t-elle 400000 bactéries ?

Exercice 46 *D'après Bac (Amérique du Nord - 2015)*

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
2. En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.