Fonctions trigonométriques

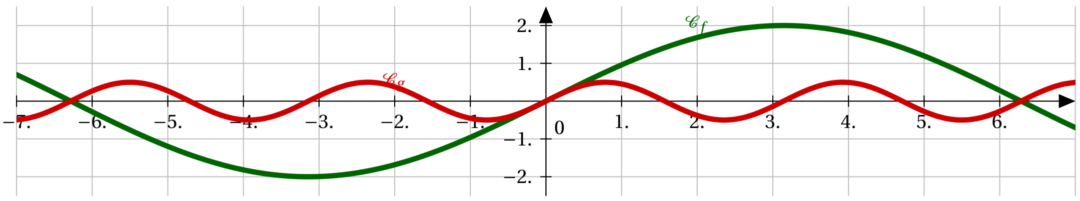
Activités mentales

Exercice 1 Soit la fonction tangente $x \longmapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on calculer $\tan x$?
2. Compléter le tableau suivant.

x	$\dfrac{3\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{4}$	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$-\dfrac{7\pi}{2}$
$\cos x$						
$\sin x$						
$\tan x$						

Exercice 2 Les deux courbes suivantes ont une équation du type $y = a\sin\omega x$. Retrouver a et ω.



Exercice 3 Résoudre sur I l'équation donnée.

1. $\cos t = \cos\dfrac{\pi}{6}$ $\quad I = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin t = \sin\dfrac{\pi}{3}$ $\quad I =]-\pi\,;\,\pi]$
3. $\sin t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad I = [0\,;\,2\pi]$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Parmi les affirmations suivantes, déméler le vrai du faux. Justifier.

1. $f'(x) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
2. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. f est strictement monotone sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$
4. $f(x) = \sqrt{2} \Longleftrightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Calculs avec cosinus et sinus

Exercice 5 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

1. $\sin(3\pi + x)$
2. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$
3. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$
5. $\sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
6. $3\sin(\pi + x) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(x - \pi)$

Exercice 6

1. Étant donné que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 7 Établir pour tous réels x et y les égalités suivantes.

1. $\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin x\cos x + \cos y\sin y$
2. $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.
3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$

Exercice 8

1. Simplifier l'expression suivante : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. Établir l'égalité suivante : $\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x} + \dfrac{\sin 2x}{\sin x} = \dfrac{(\sin 3x)^2}{\sin 2x \sin x}$
3. Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation suivante : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x) = \cos\dfrac{\pi}{7}$

Périodicité et parité du cosinus et sinus

Exercice 9 Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f : x \mapsto \sin(10\pi x)$ $\quad T = 0,2$
2. $f : x \mapsto \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad T = \frac{\pi}{2}$
3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{10x-1}{3}\right)$ $\quad T = \frac{3\pi}{5}$
4. $f : x \mapsto \frac{2}{5}\cos(3\pi x)$ $\quad T = \frac{2}{3}$

Exercice 10 Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f : x \mapsto \sin(6x-3)$ $\quad T = \frac{\pi}{3}$
2. $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad T = \pi$
3. $f : x \mapsto \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad T = \pi$
4. $f : x \mapsto \left(4\cos^2 x - 3\right)\cos x$ $\quad T = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 11 Étudier la parité des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto x^2 + 4$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1+x^2+x^4}{x(x^2+x^4)}$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$
5. $f_6 : x \mapsto |x|$
6. $f_7 : x \mapsto \cos x + \sin x$
7. $f_8 : x \mapsto \cos(x+\pi)$

In.équation avec cosinus et sinus

Exercice 12 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$
2. $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
3. $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}$
4. $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
5. $2\cos 2x = 1$
6. $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos 2x = \cos x$
8. $\sin 3x = \cos x$

Exercice 13 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin x = -\frac{1}{2}$
3. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos x = -\sin x$

Exercice 14

1. Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :
   a. $\cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$
   b. $\sin x$ sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{7\pi}{3}\right]$
2. À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$:
   a. $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$
   b. $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$
   c. $\cos x < 0$

Exercice 15 Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
2. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$
4. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$
5. $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0$

Étude de fonctions

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = 2x + \sin 2x$

1. Étudier la parité de f. Interpréter graphiquement.
2. a. Démontrer que, pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) = 2(1+\cos 2x)$
   b. Étudier les variations de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
3. À l'aide de **1**, dresser le tableau de variation de f.

Exercice 17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x - \sin x$

1. Calculer $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f.

Exercice 18 Soit les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,2\pi]$ par : $f(x) = \cos 2x \cos x$ et $g(x) = \sin 2x \sin x$

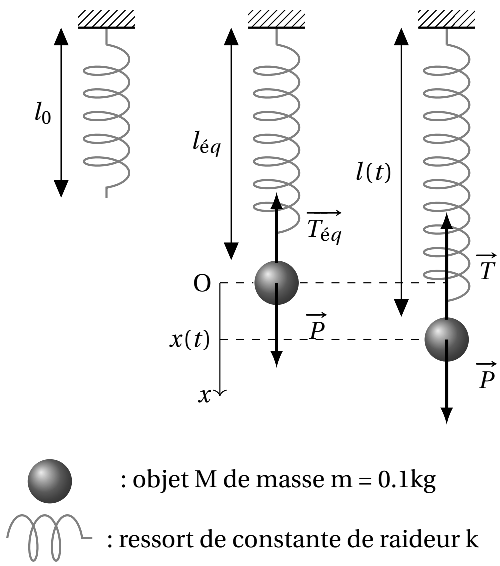
1. Montrer que $f(x) - g(x) = \cos 3x$.
2. Résoudre l'équation $\cos 3x > 0$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
3. Étudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f et g sur $[0\,;2\,\pi]$.

Exercice 19 Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par : $f(x) = \cos x(1 + \sin x)$ et représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

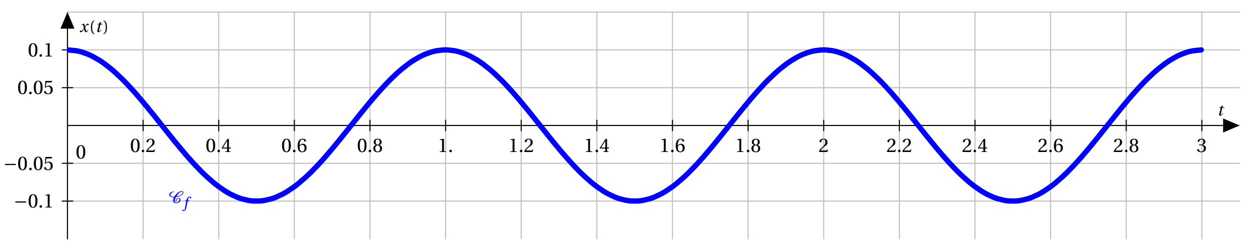
1. Vérifier que f est 2π-périodique et que f n'est ni paire ni impaire.
2. Justifier que f est dérivable et montrer que : $f'(x) = (1 + \sin x)(1 - 2\sin x)$.
3. a. Résoudre sur $[0\,;\,\pi]$ l'inéquation $2\sin x \leqslant 1$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Vérifier que pour tout réel x : $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?
6. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
7. Tracer $\mathscr{T}$ puis $\mathscr{C}$.

Exercice 20 *Un exercice qui a du ressort*

On étudie les oscillations (supposées non amorties) d'un pendule élastique vertical constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k, auquel on accroche un solide de masse $m = 0,1$ kg.
Le ressort s'allonge et un équilibre est atteint. Puis, on étire le ressort verticalement et on le lâche.
La position du centre d'inertie du solide est repérée par x (en mètres) en fonction du temps t (en secondes).



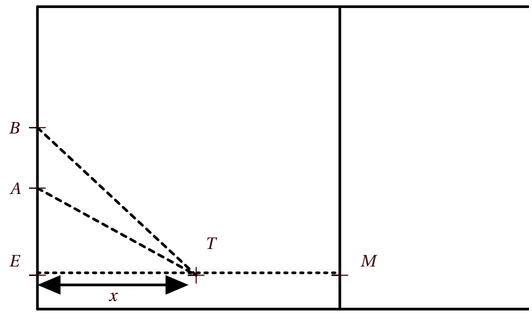
Un enregistrement de 3 secondes a donné la représentation graphique suivante :



1. Lire graphiquement $x(0)$ et $x'(0)$.
2. Pour $t \geqslant 0$, on définit la fonction x par : $x(t) = \alpha \sin(2\pi t + \varphi)$ avec $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$
   a. Montrer que la fonction x est 1-périodique.
   b. Déterminer α et φ.
3. L'équation que vérifie l'abscisse x du centre d'inertie du solide, appelée équation différentielle, s'écrit : $mx''(t) + kx(t) = 0$ Calculer la valeur exacte de la constante de raideur k du ressort.
4. Étudier le signe de $x'(t)$ sur $[0\,;\,1]$. En déduire les variations de x sur $[0\,;\,1]$.

Exercice 21 *D'après BAC Métropole 2016*

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ETA}}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ETB}}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.
   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.
   On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$,
   $$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$
   Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6x}{x^2+765}$.
4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.
   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ à 0,01 radian près.