Géométrie vectorielle dans l'espace

Vecteurs de l'espace

Exercice 1 Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le centre du carré $ABCD$, J le centre du carré $EFGH$ et K le milieu de $[IJ]$.

1. Faire une figure
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
4. En déduire que K est le milieu de $[AG]$

Exercice 2 Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[IJ]$.
Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MK}$

Exercice 3 Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace.

1. On donne les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Même question pour $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+6\vec{j}-\frac{15}{2}\vec{k}$

Exercice 4 Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace.

1. On donne les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e_2}=\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{e_3}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?
2. Même question pour $\vec{e_1}=\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e_2}=6\vec{i}-3\vec{j}+16\vec{k}$ et $\vec{e_3}=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$

Exercice 5 Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{k}$ et $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

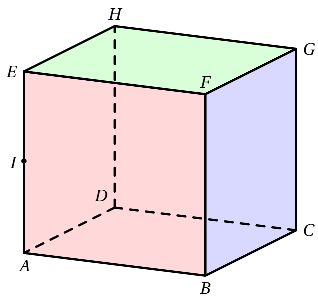
Exercice 6 Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=\vec{i}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. Ces vecteurs forment-ils une base de l'espace ?
2. Exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. On considère le vecteur $\vec{s}=x\vec{i}+y\vec{j}$ où x et y sont réels. Démontrer qu'il existe un couple $(\lambda;\mu)$ de réels tels que $\vec{s}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

Exercice 7 Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$.
Déterminer un vecteur $\vec{w}$ tel que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient linéairement indépendants.

Droite et plans de l'espace

Exercice 8 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci dessous.



1. Donner un repère du plan (ABC).
2. Donner un repère de la droite (AE)
3. On note I le milieu de $[AE]$
   a. $\left(I;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)$ est-il un repère d'un plan ? Justifier.
   b. $\left(I;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC}\right)$ est-il un repère d'un plan ? Justifier.
4. Donner trois différentes bases de l'espace en utilisant les points de la figure.

Exercice 9 On considère un triangle ABC, I un point de segment $[AB]$ et J un point du segment $[AC]$, le droite (IJ) n'étant pas parallèle à la droite (BC). On note S un point n'appartenant pas au plan (ABC).
Réaliser une figure à main levée et déterminer l'intersection de la droite (BC) et du plan (SIJ).

Exercice 10 On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.

1. Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est une base de l'espace.
2. On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[HG]$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un cube et I et J les points tels que $I \in [HD]$ et $HI = \frac{2}{3}HD$; $J \in [FG]$ et $FJ = \frac{3}{4}FG$. Construire la section du cube par le plan (EIJ).

Exercice 12 $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que $I \in [EF]$ et $EI = \frac{1}{3}EF$; $J \in [BC]$ et $BJ = \frac{1}{2}BC$; $K \in [HG]$ et $HK = \frac{3}{4}HG$. Construire la section du cube par le plan (IJK).

Exercice 13 $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que : $I \in [AD]$ et $AI = \frac{1}{3}AD$; $J \in [FG]$ et $FJ = \frac{2}{3}FG$; $K \in [AB]$ et $AK = \frac{1}{3}AB$. Déterminer et construire la section du cube par le plan (IJK).

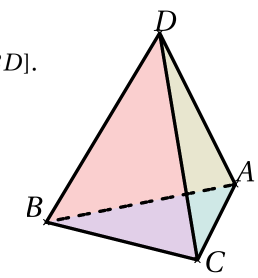
Droite et plans de l'espace

Exercice 14 Soient $A(-1;4;-3)$ et $B(2;1;3)$. Déterminer les coordonnées de M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice 15

1. Placer les points $A(1;0;2)$, $B(1;2;0)$, $C(1;1;-2)$ et $D(1;-2;1)$ dans un repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,; \vec{k}\,)$.
2. On considère le vecteur $\vec{u} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$. Construire le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine $M(0;-1;1)$.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 16 *Python* Ecrire un fonction avec Python qui, connaissant les coordonnées de deux points A et B de l'espace, renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$



Exercice 17 Soit un tétraèdre $ABCD$. On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[BD]$.

1. L'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$
   a. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.
   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
2. L'espace est rapporté au repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. Donner les coordonnées des points de la figure.

Exercice 18 On considère les points $A(0;1;1)$, $B(2;1;1)$, $C(3;1;1)$ et $D(1;1;1)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit E le point de coordonnées $(2;2;4)$. Déterminer les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soit I le point de l'espace tel que$F$ soit le milieu de $[AI]$ et J le milieu de $[EF]$. Démontrer que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 19 On considère les points $A(1;1;2)$ et $B(-1;3;4)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires
2. Soit M, le point du plan défini par $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$. Les points A, B et M sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 20 Soient $A(1;2;1)$, $B(1;-1;1)$ et $C(3;1;2)$ trois points de l'espace. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $E(3;7;2)$. Déterminer les coordonnées du point F telles que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$. Les points G, J et F sont-ils alignés ? Justifier.