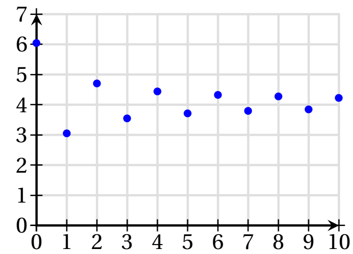
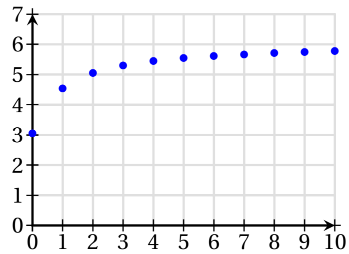
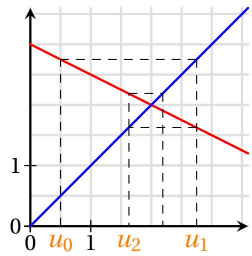
Limite de suites 2

Majorant, minorant et variations

Exercice 1 Pour chacune des suites représentées graphiquement ci-dessous, conjecturer un majorant, un minorant ou un encadrement.

1. 

2. 

3. 

Exercice 2 Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 3+5n$
2. $u_n = 5+\dfrac{1}{n+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$
4. $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$
5. $u_n = 1-\dfrac{2}{n+1}$
6. $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - 4$
7. $u_n = n+(-1)^n$

Exercice 3

1. Montrer que la suite de terme général : *(indication : $n^2-1=(n-1)(n+1)$)*;
   - **a.** n^2-4n+6 est minorée et en donner un minorant
   - **b.** $-3n^2+9n-4$ est majorée et en donner un majorant
   - **c.** $\dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant
   - **d.** $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8
   - **e.** $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et $u_{n+1}=2\sqrt{u_n-1}$ est bornée par 2 et 5.

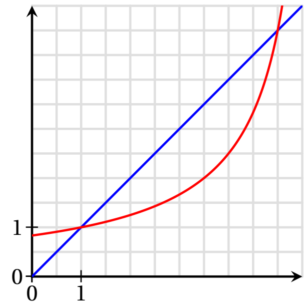
Exercice 4 En utilisant la méthode la plus adaptée, étudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas ci-dessous et en déduire si u_0 est un majorant ou un minorant de (u_n) :

1. $u_0=3$ et $u_{n+1}=3u_n-4$ pour tout $n \geqslant 0$;
2. $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n-5n^2-2$ pour tout $n \geqslant 0$;
3. $u_n=2n^3-3n^2-120n+3$ pour tout $n \geqslant 0$;
4. $u_n=\dfrac{5}{3^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$;
5. $u_0=6$ et $u_{n+1}=\sqrt{5u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=\dfrac{5n+1}{n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   - **a.** Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   - **b.** Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0=100$ et $v_{n+1}=f(v_n)=\dfrac{5v_n+1}{v_n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   - **a.** Montrer que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   - **b.** En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{5}{6-u_n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.



On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;\,5{,}5]$ par $f(x) = \dfrac{5}{6-x}$ et la droite d'équation $y = x$. On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Reproduire la figure et construire les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses.
2. Montrer que cette suite est bornée par 1 et 4.
3. Conjecturer le sens de variation de (u_n) puis démontrer cette conjecture.

Exercice 7 Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^3 + 3\sin(n)$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -5n^4 + 2n^4 \sin\left(\sqrt{n}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^4 - n^3 \cos\left(n^5\right)$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(3 + (-1)^n\right) 0{,}7^n$

Convergence des suites monotones

Exercice 8 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}(u_n + 1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que la limite ℓ de la suite vérifie $\ell = \dfrac{1}{10}(\ell + 1)^2$ et $\ell \leqslant 5$. Déterminer cette limite.

Exercice 9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{12}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{-60x + 68}{-12x + 5}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que si $x \in [2\,;4]$ alors $f(x) \in [2\,;4]$.
3. En déduire que (u_n) est bornée par 2 et 4.
4. a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{12u_n^2 - 65u_n + 68}{-12u_n + 5}$.
   b. Dresser le tableau de signe de $\dfrac{12x^2 - 65x + 68}{-12x + 5}$. En déduire que (u_n) est croissante.
5. Que peut-on en déduire sur le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 10 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x + 4$.
   b. Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   c. Conjecturer une minoration, une majoration et les variations de (u_n).
2. Démontrer ces conjectures.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 11 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 12 On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale de paramètres n et 0,5 où $n \geqslant 3$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = P(X_n = 2)$ pour tout n entier vérifiant $n \geqslant 3$.
On rappelle que pour tout entier k entre 0 et $n-1$, on a $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k+1} + \dbinom{n}{k}$.

1. Montrer que $u_n = \dbinom{n}{2} 0{,}5^n$ pour tout $n \geqslant 3$.

2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, 0,5 et n.

   b. On admet que $\binom{n}{1} \leqslant \binom{n}{2}$ pour tout $n \geqslant 3$.
   Montrer que (u_n) est décroissante.

3. En déduire que (u_n) est une suite convergente.

Pour allez plus loin

Exercice 13 *D'après Baccalauréat Asie 2013*

Partie A

On considère la suite (w_n) définie par : $w_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = \dfrac{1+3w_n}{3+w_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $w_n > 1$.
2. a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n).
   En déduire que la suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
n=int(input('Saisir un entier naturel n non nul'))
while n == 0:
    n=int(input('Saisir un entier naturel n NON nul'))
U=2
for i in range(1,n+1):
    U=(1+0.5*U)/(0.5+U)
    print(U)
```

   Créer un tableau sur le modèle de la question **2.**, puis le compléter en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

2. Pour $n = 12$, on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

   Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 14 *Suites adjacentes*

Partie A : Généralités sur les suites adjacentes

On donne, ci-dessous, la définition de deux suites adjacentes.

Définition 1:

Deux suites sont adjacentes lorsque :

- l'une est croissante;
- l'autre est décroissante;
- la différence des deux converge vers 0.

Démontrer à l'aide des deux propriétés ci-dessous que : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Propriété 1 :

- Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.
- Toute suite croissante et majorée converge et toute suite décroissante et minorée converge.

Partie B : Application

On considère (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 12$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \geqslant 0$ est une suite géométrique convergente et que ses termes sont strictement positifs.
2. **a.** Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   b. Que peut-on en déduire sur la convergence éventuelle des suites (u_n) et (v_n) ?
3. **a.** Montrer que la suite (t_n) définie pour tout n par $t_n = 2u_n + 3v_n$ est constante.
   b. En déduire la limite ℓ de (u_n) et de (v_n).
4. **a.** Écrire un algorithme demandant un entier n à l'utilisateur et donnant en sortie les valeurs de u_n et v_n.
   b. Modifier l'algorithme de la question précédente pour qu'il donne le premier rang à partir duquel l'écart entre v_n et ℓ est strictement inférieur à $0{,}000\,01$.

Exercice 15 *D'après Bac (Métropole - 2013)*

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_n \leqslant n + 3$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.
   a. Exprimer S_n en fonction de n.
   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).