Successions d'épreuves - Loi binomiale

Épreuve, loi et Schéma de Bernoulli

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$.

1. Résumer la loi de probabilité de X dans un tableau.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Sachant que la varaince de X est égale à $\frac{6}{49}$, déterminer les valeurs possibles de p.

Exercice 3 Dans un parking, on regarde au hasard une des voitures stationnées. Pour chacune des épreuves suivantes, préciser s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

1. On regarde si le véhicule est électrique.
2. On regarde la couleur du véhicule.
3. On vérifie si l'immatriculation se termine par un Z.
4. On regarde la longueur du véhicule en centimètre.
5. On regarde si la longueur du véhicule est inférieur ou égale a 450cm

Exercice 4 Gérard possède cinq cartes de fidélité de magasins différents dans sa poche. Ces cinq cartes ont toutes le même format et sont indiscernables au toucher.
Au moment du passage en caisse dans un de ces magasins, il choisit au hasard une carte de fidélité.
Justifier que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Exercice 5 Au début d'un jeu de mémoire, seize cartes sont placées face cachée sur une table. Hervé retourne une carte qui montre un palmier. Elle sait qu'une autre carte représente un palmier. Elle doit donc, au hasard, retourner une seconde carte pour espérer retrouver un palmier.
Justifier que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Loi binomiale

Exercice 6 X suit $\mathscr{B}(6;0,4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

1. $P(X=2)$ 2. $P(X=0)$ 3. $P(X \leqslant 4)$ 4. $P(X \leqslant 6)$ 5. $P(X>3)$ 6. $P(X \geqslant 5)$

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,39$. Déterminer l'entier k pour lequel la probabilité $P(X = k)$ est maximale.

Exercice 8 La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,65$. En utilisant éventuellement la calculatrice, calculer les valeurs suivantes :

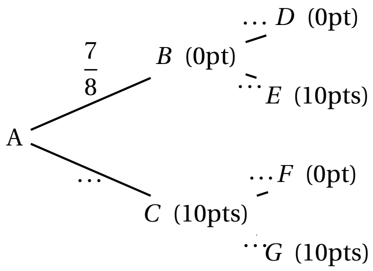
1. $P(X=13)$ 2. $P(X<15)$ 3. $P(7 \leqslant X \leqslant 14)$ 4. $P_{X<15}(X=13)$ 5. $P_{7\leqslant X\leqslant 14}(X<15)$ 6. $P_{X<15}(7 \leqslant X \leqslant 14)$

Exercice 9 Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est 0,65.
Il décide de jouer sept parties. On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

1. a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
   b. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ?
   c. Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ?
2. Il décide de changer le niveau de difficulté en « expert » et la probabilité qu'il gagne une partie contre l'ordinateur devient $0,05$. Il décide de jouer à nouveau une série de sept parties contre l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il en gagne au moins une ?

Exercice 10 Un joueur dispose d'une table inclinée où une bille, lancée d'un point A, peut suivre différents chemins. Elle rencontre plusieurs nœuds sur son chemin. À chaque fois, la probabilité qu'elle prenne le chemin du haut est de $\frac{7}{8}$.

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme de fraction.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de X.
   - **b.** Calculer l'espérance de X.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.
   On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   - **a.** Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. Arrondir au millième.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. Arrondir au millième.

Exercice 11 Une tombola est organisée dans une école.

La directrice de l'école affirme qu'un billet sur trois est gagnant.

1. Bob a acheté quatre billets et il annonce qu'il est sûr de gagner.
   On admet que l'achat de ces quatre billets est assimilable à un tirage avec remise et on note X le nombre de billets gagnants parmi les quatre.
   - **a.** Déterminer la probabilité que ses quatre billets soient gagnants.
   - **b.** Déterminer la probabilité qu'aucun de ses billets ne soit gagnant.
2. Combien de parties peut-il espérer gagner ?

Exercice 12 39 % de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de groupe A+ dans un échantillon de 183 personnes prises au hasard dans la population française.

1.
   - **a.** Sous quelle hypothèse X suit-elle une loi binomiale ?
   - **b.** Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable ?
   - **c.** On admet que cette hypothèse est vérifiée, préciser alors les paramètres de X.
2. On interroge 183 donneurs de sang et, parmi eux, 34 % sont du groupe A+. Les donneurs de sang sont-ils représentatifs de la population française sur ce critère ?

Espérance et variance d'une loi binomiale

Exercice 13 X suit $\mathscr{B}(25; 0,17)$, calculer les valeurs suivantes approchée au millième près :

1. $P(X=5)$ 2. $P(X=2)$ 3. $P(X \leqslant 5)$ 4. $E(X)$ 5. $V(X)$

Exercice 14 Soit X une variable aléatoire suit suit la loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0,31$.

1. Calculer, si possible, $P(X = 11)$, $P(X = 13,5)$ et $P(X = 1)$.
2. Calculer $P(X \leqslant 12)$ et $P(X > 17)$.
3. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$ et $P(7,8 \leqslant X < 9)$.
4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 15 Une usine produit des grille-pain, certains étant défectueux, et on suppose que la probabilité qu'un grille-pain soit défectueux est égale à $0,03$.
On prélève au hasard un échantillon de 100 grille-pain dans la production d'une journée et on admet que cette production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 grille-pain.
On considère la variable aléatoire X qui, à ce prélèvement de 100 grille-pain, associe le nombre de grille-pain défectueux.
Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait 96 grille-pain en bon état dans ce prélèvement ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins trois grille-pain sont défectueux » ?
4. a. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
   b. Calculer $P(X \leqslant E(X))$.

Exercice 16 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{64}{15625}$	$\frac{576}{15625}$	$\frac{432}{3125}$	$\frac{864}{3125}$	$\frac{972}{3125}$	$\frac{2916}{15625}$	$\frac{729}{15625}$

Déterminer les valeurs des deux paramètres n et p de la loi binomiale.

Exercice 17 Soit X un variable aléatoire. Sachant que son espérance vaut $19,2$ et que sa variance vaut $3,84$, X peut-elle suivre une loi binomiale ?

Exercice 18 Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) de la région Ile-de-France, la variable aléatoire X donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.

1. Déterminer la probabilités qu'il passe une journée sans aucune intervention.
2. Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.
3. Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois interventions aujourd'hui ?

Exercice 19 Maxime est un cuisiner maladroit : à chaque fois qu'il fait un gâteau, il laisse tomber un œuf par terre avec une probabilité de $0,6$. S'il laisse tomber un œuf, il devra en prendre un autre qu'il ne laissera pas tomber. Maxime fait un gâteau par semaine et chaque gâteau nécessite un seul œuf : de combien d'œufs aura-t-il besoin en moyenne chaque année de 52 semaines ?

Exercice 20 Le dahu est un animal difficile à chasser. On estimes que lors d'une battue, la probabilité d'attraper un dahu est égale à 5%.
Quel est le nombre minimal de parties de chasse à organiser pour avoir une probabilité de 95% d'attraper au moins un animal ?