Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Exercice 1 Majorer la probabilité d'avoir un écart à la moyenne supérieur ou égal à 2 lorsque $V(X) = 1$.

Exercice 2 Majorer la probabilité demandée dans les cas suivants.

1. $P(|X - E(X)| \geqslant 2)$, avec $V(X) = 2$.
2. $P(|X - E(X)| \geqslant 20)$, avec $V(X) = 10$.
3. $P(|X - E(X)| \geqslant 7)$, avec $V(X) = 12$.
4. $P(\{X \leqslant 3\} \cup \{X \geqslant 17\})$, avec $E(X) = 10$ et $V(X) = 5$.

Exercice 3 On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	1	4	10
$P(X = x_i)$	0,6	0,3	0,1

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer $P(|X - E(X)| \geqslant 2)$.
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $a = 2$ et comparer le résultat à celui obtenu à la question précédente.

Exercice 4 Sur les vingt matchs précédents, une équipe de rugby a marqué 602 essais. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais marqués au cours d'un match.

1. Que vaut l'espérance de X ?
2. On suppose que la variance est égale à $0,67$. Majorer la probabilité qu'au cours du prochain match, l'écart entre le nombre d'essais marqués est la moyenne soit supérieur ou égal à 1.
3. Minorer la probabilité que l'écart entre le nombre d'essais marqués et la moyenne soit strictement inférieur à 2.

Exercice 5 Dans un gare, le nombre moyen de passagers par jour est évalué à 5000 avec une variance de 2500. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de visiteurs enregistré lors d'une journée et la moyenne soit supérieur ou égale à 100.

Exercice 6 Une urne contient trois boules noires et sept boules blanches. On tire des boules successivement et sans remise, jusqu'à l'obtention de la première boules blanche.
On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Minorer la probabilité de l'événement : $|X - E(X)| < 1,625$.
4. a. Calculer la probabilité de l'événement : $|X - E(X)| < 1,625$.
   b. Comparer la résultat obtenu avec la minoration de la question 3.

Exercice 7 On considère une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile est p. Soit X la variable aléatoire valant 1 si pile est obtenu et 0 sinon. Soit a un réel strictement positif.
Déterminer la valeur de p pour laquelle le majorant de $P(|X-E(X)| \geqslant a)$ obtenu à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est le plus grand.

Exercice 8 Une personne souffre d'hyperglycémie si son taux de glycémie à jeun est supérieur à $1,8 g Ł^{-1}$ et souffre d'hypoglycémie si ce taux est inférieur à $0,4 g Ł^{-1}$. Un statisticien affirme : « En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, je peux affirmer que moins de 15% de la population présente un problème de glycémie. »
Un médecin lit cette conclusion et se demande s'il est possible d'en déduire l'espérance et la variance de X, où X est la variable aléatoire donnant le taux de glycémie d'une personne.
Proposer une argumentation détaillée permettant de calculer l'espérance et majorer la variance de X puis déterminer $E(X)$

Inégalité de concentration

Exercice 9 On lance n fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. on note M_n le nombre moyen de 5 obtenus. A l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la valeur minimale de n pour respecter les condition suivantes :

1. $a = 0,05$ et $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant 0,1$.
2. $a = 0,02$ et $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant 0,05$.
3. $a = 0,1$ et $P(|M_n - E(X)| < a) \geqslant 0,95$.
4. $a = 0,01$ et $P(|M_n - E(X)| < a) \geqslant 0,99$.

Exercice 10 On effectue n tirage avec remise d'une carte d'un jeu de 32 cartes. Pour le i-ième tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la carte est un pique et 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_i.
2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. Quelle est la valeur minimale de n, pour laquelle la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins $0,1$ soit inférieur à $0,05$?

Exercice 11 Dans une classe de 25 élèves, 10 sont des garçons. On effectue n tirages avec remise d'un élève de cette classe pour l'interroger.
Pour le i-ème tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la personne interrogée est un garçon et 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_i.
2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. Quelle est la valeur minimale de n, pour laquelle la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins $0,1$ soit inférieur à $0,05$?

Exercice 12 On souhaite démontrer l'inégalité de concentration. Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Pour l'entier i compris entre 1 et n, on note X_i des variables aléatoires indépendantes et toutes de même loi de probabilité que X. On note enfin $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Rappeler l'inégalité de concentration.
2. Démontrer que $E(M_n) = E(X)$.
3. **a.** Justifier que $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = n(V(X))$.
   b. Démontrer alors que $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$.
4. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur M_n pour démontrer l'inégalité de concentration.

Loi des grands nombres

Exercice 13 Dans chacun des cas suivants, justifier si l'on peut appliquer la loi des grands nombres ou non.

1. On effectue n tirages avec remise d'une carte d'un jeu de 52 cartes et on note si celle-ci est un as. on simule cette expérience pour de grandes valeurs de n.
2. On considère une urne contenant un très grand nombre de boules. on effectue n tirages sans remise d'une boule de l'urne et on note sa couleur.

Exercice 14 On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 dont on ignore s'il est truqué ou non.

1. Pour $n = 10$, on obtient les valeurs suivantes.
   Peut on conclure que le dé est truqué ? Justifier.

Face	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois	2	4	1	1	2	0

2. Pour $n = 100000$, on obtient les valeurs suivantes.

Face	1	2	3	4	5	6
Nombre de fois	16665	16669	16663	16671	16662	16670

Peut on conclure que le dé est truqué ? Justifier en utilisant les propriété du cours.

Exercice 15 On considère un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et une succession de n lancers de ce dé, où n est un entier naturel strictement positif. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 1 obtenu à l'issue de ces n lancers.

1. Que valent l'espérance et la variance de X.
2. Minorer la probabilité de l'événement $\left|X - \frac{n}{6}\right| < \frac{n}{100}$ en fonction de n à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. En déduire le nombre de lancers nécessaires pour que la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces n lancers soit dans l'intervalle $\left]\frac{n}{6} - \frac{n}{100}; \frac{n}{6} + \frac{n}{100}\right[$, avec une certitude d'au moins 95%.

Exercice 16 On considère une urne contenant dix boules, dont quatre sont rouges. On tire successivement et avec remise une boule de l'urne et on s'arrête dès que l'on obtient une première boule rouge. L'objectif est de conjecturer l'espérance de cette loi à l'aide d'un programme.

1. Expliquer l'utilisation d'une boucle `while` ici.
2. Reproduire et compléter le programme suivant dont l'objectif est de simuler l'expérience.
3. Quel est le rôle de la variable `S`?
4. Tester le programme pour différentes grandes valeurs de n. Quelle semble être l'espérance de cette loi? Justifier.

```
from random import randint
def rang(n):
  S=0
  for i un range(n):
    X=randint(1,10)
    C=1
    while X<=...:
      X=randint(1,10)
      C=...
    S=S+C
  return ...
```

Exercice 17 Une urne contient N boules (avec $N > 50$), dont 50 sont noires et les autres sont blanches. Hervé réalise l'expérience n fois pour tenter de trouver le nombre total de boules dans l'urne. Il obtient les résultats suivants.

n	100	1000	10000
Proportion de boules blanches	0,753	0,748	0,7499

Combien de boules semble-t-il y avoir dans l'urne? On justifiera soigneusement la réponse.

Exercice 18 Un professeur oublie fréquemment les clefs de sa salle de classe. S'il oublie ses clefs le jour n, la probabilité qu'il les oublie le lendemain est de $0,1$. S'il n'oublie pas ses clefs le jour n, la probabilité qu'il les oublie le lendemain est de $0,4$. La probabilité qu'il les oublie le premier jour est de $0,2$.
On considère, pour tout entier naturel n non nul, l'événement E_n : « Le professeur oublie ses clefs le jour n » et on note $p(E_n) = p_n$.

PARTIE A

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n pour tout entier $n > 0$.
3. Pour tout entier $n > 0$, on pose $u_n = p_n + \alpha$. Déterminer α pour que (u_n) soit géométrique.
4. Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et en donner l'interprétation.

PARTIE B

On suppose qu'un élève arrive uniquement à répondre aux questions 1. et 2. de la partie A. Il décide donc d'entreprendre une démarche numérique pour répondre aux questions suivantes.

1. Écrire un algorithme qui permette de calculer les n premiers termes de la suite p_n.
2. Programmer et tester l'algorithme avec Python pour plusieurs (grandes) valeurs de n.
3. Quelle semble être la limite de la suite (p_n)? Ce résultat est-il cohérent avec le résultat de la partie A?