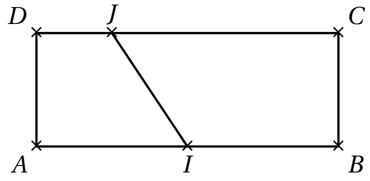
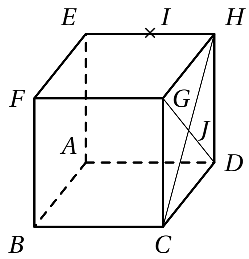
Orthogonalité et distance dans l'espace

Produit scalaire dans l'espace



Exercice 1 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$.
Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$ **3.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$ **4.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$



Exercice 2 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.
Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

1. Donner les coordonnées du point G dans le repère :

a. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ **b.** $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$ **c.** $(H; \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HG})$

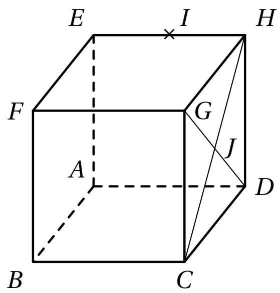
2. Même question avec le point B et J.

Exercice 3 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 2\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :

1. $\left\|\vec{u}\right\|$ **2.** $\left\|\vec{v}\right\|$ **3.** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **4.** θ

Exercice 4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\left\|\vec{u}\right\| = 3$, $\left\|\vec{v}\right\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer :

1. $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ **2.** $\vec{v} \cdot (-\vec{u} + 2\vec{v})$ **3.** $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ **4.** $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

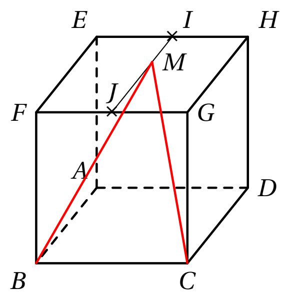


Exercice 5 On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$. En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$ **2.** $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$ **3.** $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$

4. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$ **5.** $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ **6.** $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

Exercice 6 On considère le cube suivant, d'arête 1, où I et J sont les milieux respectifs de $[EH]$ et $[FG]$. Soit M un point appartenant à $[IJ]$.



1. **a.** Démontrer que pour $M \neq J$, les triangles MJB et MJC sont rectangles en J.

b. En déduire que $MB = MC$.

c. En déduire que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 - \dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer la ou les positions du point M pour que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 1$.

Exercice 7 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 0; 1)$ et $C(2; 1; 0)$. Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles :

1. $\widehat{ABC}$ **2.** $\widehat{BAC}$ **3.** $\widehat{ACB}$

Exercice 8 A l'aide des formules de polarisation, retrouver les valeurs manquantes.

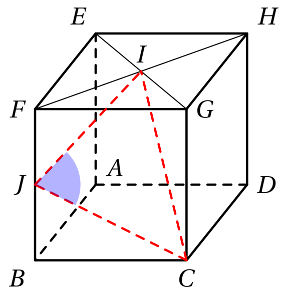
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\left\|\vec{u}\right\|$	$\left\|\vec{v}\right\|$	$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|$	$\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|$
	3	2	4	
5	2			$\sqrt{3}$
8	3	4		

Exercice 9 Dans un tétraèdre $HARU$, on donne $HA = 2$, $HR = 3$ et $AR = 4$.

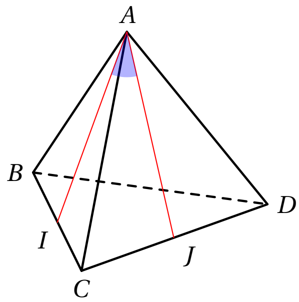
1. A l'aide des formules de polarisation, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HR}$
2. En déduire une mesure arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{RHA}$

Exercice 10 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.

On cherche à calculer une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.



1. Méthode géométrique
   a. Calculer les trois longueurs du triangle IJC.
   b. En déduire que $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{4}$.
   c. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
2. Autre méthode géométrique
   a. Calculer $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$ en décomposant astucieusement les deux vecteurs sur les arêtes du cube.
   b. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
3. Méthode analytique
   a. En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, calculer analytiquement $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$.
   b. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
4. Quelle est la méthode :
   a. qui demande le moins / le plus de connaissances théoriques ?
   b. la moins / la plus rapide ?



Exercice 11 On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2.
Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.

1. a. Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.
   b. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré près.

Longueur

Exercice 12 On donne la fonction suivante écrite avec Python.

1. Interpréter le script. Que renvoie la fonction `norme(4,3,0)`.
2. Proposer une fonction qui renvoie la distance entre deux points en utilisant la fonction `norme`

```python
from math import sqrt
def norme(x,y,z):
    l=sqrt(x**2+y**2+z**2)
    return l
```

Exercice 13 Quelle est la distance entre deux sommets opposés d'un cube de coté a ?

Exercice 14 On appelle tétraèdre trirectangle en A un tétraèdre dont trois faces sont des triangles rectangles isocèles en A. Soit $RECT$ un tétraèdre trirectangle en R.

1. Peut-on définir un repère orthonormé de l'espace à partir de ce tétraèdre ? Justifier la réponse.
2. Montrer que la face ECT est un triangle équilatéral.

Orthogonalité

Exercice 15 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Exercice 16 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Exercice 17 Même exercice que le avec les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}k+1\\-k\\2\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$.

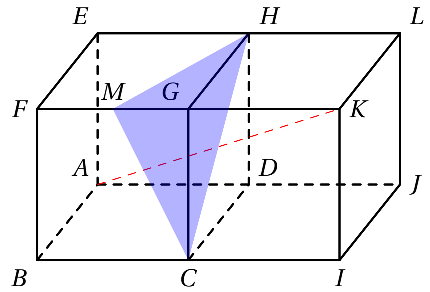
Exercice 18 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1;2;1)$, $B(4;6;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 19 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les quatre points $A(-1;1;2)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;3;1)$ et $D(-8;2;-3)$.

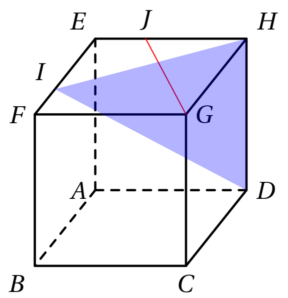
1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 20 On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1. Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CM}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.
2. En suivant cette méthode, calculer $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HM}$.
3. Conclure.

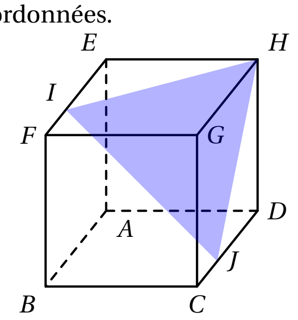
Exercice 21 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On a I et J tels que $\overrightarrow{EI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1. Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).
2. Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).
3. En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).
4. Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GJ) a pour coordonnées $\left(\frac{4}{13};\frac{7}{13};1\right)$ dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Exercice 22 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. On a I et J tels que $\overrightarrow{EI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On considère la droite (Δ), orthogonale au plan (IHJ) et passant par G. Elle coupe respectivement les plans (ABD) et (ADE) en M et N dont ou souhaite déterminer les coordonnées.



1. Pourquoi (Δ) est-elle orthogonale aux droites (IH) et (JH) ?
2. On note $M(x\,;\,y\,;\,z)$.
   a. Déterminer z.
   b. Utiliser l'orthogonalité des droites (Δ) de (IJ) puis de (Δ) de (IH) afin d'en déduire les valeurs x et de y.
   c. À quel plan, autre que (ABD), M appartient-il ?
3. En utilisant la même méthode, déterminer les coordonnées du point N.