Primitive et équation différentielle

Déterminer des primitives

Exercice 1 Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-3x$ et $F(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2$.

1. Vérifier que F est une primitive de f.
2. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x_0=-1$

Exercice 2 Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ et $G(x)=\dfrac{3x^2-x-5}{x+1}$
F et G sont-elles primitives d'une même fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

Exercice 3 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x\mapsto -3$
2. $x\mapsto 2x-\dfrac{1}{3}$
3. $x\mapsto \dfrac{x^2}{3}-x$
4. $x\mapsto 3x^2+\dfrac{2x}{3}-7$

Exercice 4 Déterminer sur $]0:+\infty[$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-1$ vérifiant $F(1)=-1$.

Exercice 5 Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x)=\mathrm{e}^x$ vérifiant $F(0)=\mathrm{e}$.

Exercice 6 Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x)=3x^2-2x$ vérifiant $F(1)=2$.

Exercice 7 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x\mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$ sur $]-\infty;-2[$
2. $x\mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$ sur $]-3;+\infty[$

Exercice 8 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x\mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x\mapsto \dfrac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ sur $]1;+\infty[$

Exercice 9 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x\mapsto \mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^{-x}$
2. $x\mapsto \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$
3. $x\mapsto \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$
4. $x\mapsto \dfrac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$

Équations différentielles et fonctions de référence

Exercice 10 Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y'=2$
2. $y'=1-2x$
3. $y'=5x-3$
4. $y'=x^2$
5. $y'=x^3$
6. $y'=3x^2+2x+1$

Exercice 11 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'=\dfrac{1}{x^3}$ définies sur $]0;+\infty[$.

Exercice 12 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'=x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définies sur $[0;+\infty[$.

Exercice 13 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'=-\mathrm{e}^x$.

Exercice 14 Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y'=-2\,\mathrm{e}^{-2x}$
2. $y'=4\,\mathrm{e}^{-5x}$
3. $y'=-2\,\mathrm{e}^{6x-7}$
4. $y'=x\,\mathrm{e}^{-x^2}$

Exercice 15 Déterminer une équation différentielle dont une solution est $x\mapsto 4\,\mathrm{e}^{5x}$.

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $I=]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\in I$, $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'=f$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $I =]0;1[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 18 Soit f la fonction définie sur $I =]-1;1[$ par $f(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

1. Factoriser l'expression $(x^2-1)^3$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 19 Résoudre les équations différentielles après les avoir transformées, en précisant l'ensemble de définition des solutions

1. $x^2 y' = -1$
2. $\sqrt{x}\, y' + 1 = 0$
3. $x^4 y' = 3(x-1)^2$
4. $\mathrm{e}^{2x} y' = -\mathrm{e}^x$

Exercice 20

1. Montrer que l'équation différentielle $y' = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x-1}}$ admet sur $I =]1;+\infty[$ une solution de la forme $x \mapsto (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x-1}$ où a, b, c et d sont des réels que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions sur I de cette équation.

Équations différentielles avec condition initiale

Exercice 21 Déterminer la solution F de l'équation différentielle $y' = x - 1$ telle que $F(1) = -1$.

Exercice 22 Déterminer la solution F de l'équation différentielle $y' = x^2 - x + 1$ telle que $F(0) = 0$.

Exercice 23 Déterminer la solution F de $y' = x^3 + x + \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $F(1) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 24 Déterminer la solution F de $y' = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^5}$ définie sur $\mathbb{R}^{-*}$ telle que $F(-1) = 1$.

Exercice 25 Déterminer la solution sur I de l'équation différentielle donnée qui prend la valeur y_0 en x_0

1. $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $x_0 = 2$ et $y_0 = -\sqrt{2}$
2. $y' = 3\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = \mathrm{e}$

Exercice 26 Déterminer la solution sur I de l'équation différentielle donnée qui prend la valeur y_0 en x_0

1. $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = -\dfrac{1}{16}$
2. $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ avec $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$

Équations différentielles $y' = ay + b$

Exercice 27 Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$
2. $2y' - 3y = 8y + 4y'$
3. $5y' + 3y = 0$
4. $-\dfrac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 28 Déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

1. $y' - \sqrt{2}y = 0$ avec $F(\sqrt{2}) = 1$
2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $F(0) = 5$
3. $\dfrac{1}{2}y' + y = \dfrac{1}{2}y - y'$ avec $F(3) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Exercice 29 Dans chacun des cas suivant, déterminer une équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel et dont la fonction f est une solution.

1. $f : x \mapsto -3\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$
2. $f : x \mapsto -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$
3. $f : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{3-2x}$
4. $f : x \mapsto \pi\,\mathrm{e}^{\pi+x}$

Exercice 30 Indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. La solution de l'équation $y' - 4y = 0$ qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y_0 + \mathrm{e}^{4(x-x_0)}$.
2. La fonction constante égale à 0 est solution de toutes les équations différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions non nulles de l'équation différentielle $y' = ay$ avec a un réel strictement positif ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Les solutions de l'équation différentielle $3y' - 2y = 1$ sont de la forme $C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \dfrac{2}{3}$, où C est une constante réelle.

Équations différentielles $y' = ay + f$

Exercice 31 Montrer que $\varphi : x \mapsto 3x - 1$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 9x$, puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 32 Après avoir déterminé une fonction affine φ : solution particulière de l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 2x$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = -2$.

Exercice 33 Montrer que $\varphi : x \mapsto x^2 - x - 1$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' - 3y = 3x^2 + x + 2$, puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 34 Montrer que $\varphi : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + y = \mathrm{e} - x$, puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 35 Déterminer une fonction φ de la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{-2x}$ (où a et b sont réels) solutions particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = (2x+1)\,\mathrm{e} - 2x$, puis donner toutes les solutions de cette équation.

Exercice 36 Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière φ de la forme indiquée.

1. $2y' + y = x + 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$
2. $y' + 3y = 2x - 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$
3. $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$
4. $2y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 37 Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière φ de la forme indiquée.

1. $y' + 3y = (2 + 2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec $\varphi(x) = (mx + p)\,\mathrm{e}^{-2x}$
2. $y' + y = (3 - 2x)\,\mathrm{e}^{x}$ avec $\varphi = (mx + p)\,\mathrm{e}^{x}$
3. $y' - 2y = -(3x^2 + x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $\varphi = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^{-x}$
4. $y' + 2y = -\left(2x^2 - x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$ avec $\varphi = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^{2x}$

Exercice 38 Lors de la chute d'un objet de masse m sur Terre, une force de frottement due à la résistance de l'air s'applique à cet objet. l'intensité de cette force est proportionnelle à la vitesse instantanée v de l'objet.
Si la chute est verticale, la deuxième loi de Newton permet d'écrire la relation $m \times a(t) = mg - kv(t)$. La fonction a représente l'accélération de l'objet à l'instant t, g désigne l'accélération de la pesanteur (constante) et k est une constante positive.
on rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $a(t) = v'(t)$.

1. Déterminer une équation différentielle(E) de la forme $y' = \alpha y + \beta$ vérifiée par v (où α et β sont réels).
2. Résoudre cette équation puis exprimer v en fonction de t.

Exercice 39 Une colonie de 2000 bactérie est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. on admet que l'évolution en fonction du temps t en heure $(t \geqslant 0)$ du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle $(E) : N'(t) = 3N(t) - 0,005\,(N(t))^2$.
Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$ et on définit sur $[0;+\infty[$ la fonction g par $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.
2. Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de $(E') : y' = -3y + 0,0005$.
3. Résoudre (E') puis résoudre (E).
   a. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.

b. Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.

Exercice 40 Une cuve contient vignt litres d'air composé de 20% de dioxygène (O_2) et de 80% de diazote (N_2). On injecte du diazote dans cette cuve avec un débit de 0,2 litre par seconde; le même débit de gaz s'échappe de la cuve. on suppose que le mélange des gaz est homogène.
On note $x(t)$ la proportion volumique de diazote contenue dans la cuve à l'instant t, en seconde, et $v(t)$ le volume de diazote présent dans la cuve à l'instant t.

1. Déterminer une relation liant $x(t)$ et $v(t)$.
2. **a.** Quel est le volume de diazote entrant dans la cuve entre deux instants très proches t et $t+\Delta t$?

   b. Quel est le volume de diazote sortant de la cuve entre les instants t et $t+\Delta t$? On suppose que Δt est suffisamment petit pour que la concentration en diazote reste constante entre les instants t et $t+\Delta t$.
3. En déduire la variation $\Delta v(t)$ du volume de diazote contenu dans la cuve entre les instants t et $t+\Delta t$, puis la variation $\Delta x(t)$ du pourcentage de diazote entre les même instants.
4. En faisant tendre Δt vers 0, montrer que x est solution de l'équation différentielle $y' = 0,01(1-y)$
5. **a.** Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de t.

   b. Quelle sera la proportion de diazote, arrondie à 0,1% près, au bout de cinq minutes?

Pour aller plus loin

Exercice 41 On considère l'équation différentielle d'inconnue y : $(E) : y'' - y' - 2y = 2x\,\mathrm{e}^x$. Cette équation différentielle est une équation du econd ordre avec second membre.

1. Soient A et B deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0) : y'' - y' - 2y = 0$. On admet que toutes les solutions de (E_0) sont de cette forme.
2. Déterminer une solution particulière φ de (E) de la forme $x \mapsto (mx+p)\,\mathrm{e}^x$ où m et p sont réels.
3. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que g et g' soient dérivables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si, et seulement si, $g-\varphi$ est solution de (E_0).
4. Résoudre (E) et déterminer la solution de h de (E) telle que $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

Exercice 42 On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue y : $(E) : y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$. Cette équation différentielle est une équation du second ordre avec second membre.

1. Montrer que l'équation (E) admet comme solution une fonction polynôme du second degré φ que l'on déterminera.
2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que g et g' sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si, et seulement si, $g-\varphi$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - y' - 6y = 0$.
3. On admet que si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$ (a, b et c étant réel) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{r_1 x} + B\,\mathrm{e}^{r_2 x}$ où A et B sont des réels.
4. **a.** Résoudre l'équation (E_0).

   b. En déduire les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.