Représentation paramétrique et équation de droite

Représentation paramétrique de droite

Dans tous les exercices suivants, sauf indications contraire, l'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(-1;2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$
2. $A(1;7;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
3. $A(-1;0;4)$ et $\vec{u}=\vec{k}$

Exercice 2 On considère les points $A(-3\,;\,2\,;\,4)$ et $B(-1\,;\,1\,;\,0)$. Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 3 Soit Δ la droite de représentation paramétrique : $\Delta:\begin{cases}x&=&1-4t\\y&=&3+t\\z&=&1-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

1. Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2. Le point $M(-3;4;1)$ appartient-il à la droite Δ ?
3. Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ.

Exercice 4 Soient $A(-4;1;2)$ et $B(-1;2;5)$. Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :

1. La droite (AB)
2. Le segment $[AB]$
3. La demi-droite $[AB)$

Exercice 5 On donne les points $E(4;7;2)$ et $F(3;1;-5)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).
2. On donne $\delta:\begin{cases}x=t+1\\y=6t-1\\z=7t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. Étudier la position relative de δ et (EF).

Exercice 6 Soit Δ la droite de représentation paramétrique : $\Delta:\begin{cases}x&=&1-t\\y&=&-2+3t\\z&=&-1+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec les droites d_1, d_2 et d_3 de représentation paramétrique :

1. $d_1:\begin{cases}x&=&-k\\y&=&3+2k\\z&=&4-k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$
2. $d_2:\begin{cases}x&=&1+k\\y&=&-2k\\z&=&3-k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$
3. $d_3:\begin{cases}x&=&k-2\\y&=&7-3k\\z&=&2-k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

Équation cartésienne de plan

Exercice 7 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(-1;2;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 8 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec :

1. $A(1;4;-5)$ et le vecteur $\vec{n}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$
2. $A\left(\sqrt{2};2;-\sqrt{3}\right)$ et le vecteur $\vec{n}=\sqrt{3}\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\sqrt{2}\vec{k}$

Exercice 9 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :

1. $A(2;1;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$
2. $A\left(\sqrt{2};\sqrt{3};2\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AO}$
3. $A(5;-3;4)$ et de vecteur normal $\vec{k}$
4. $A(2;-1;\sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{\imath}-\frac{3}{2}\vec{\jmath}$

Exercice 10 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ lorsque :

1. $A(2;1;0)$ et $B(-4;-1;3)$
2. $A(4;-5;6)$ et $B(1;-1;1)$
3. $A(2;-1;0)$ et $B\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3};1\right)$
4. $A(1;0;0)$ et $B(1;0;0)$

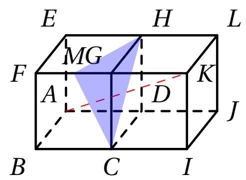
Exercice 11 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P}_2)$, parallèle au plan $(\mathscr{P}_1)$ et passant par le point A lorsque :

1. $(\mathscr{P}_1): x+y+z-1=0$ et $A(1;1;1)$
2. $(\mathscr{P}_1): x-3y+2z-4=0$ et $A(3;0;-1)$
3. $(\mathscr{P}_1): \frac{1}{3}x-\frac{5}{6}y-z-2=0$ et $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5};\frac{1}{6}\right)$
4. $(\mathscr{P}_1): \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z-4=0$ et $A(1;1;-1)$

Exercice 12 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

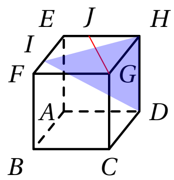
1. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $A(1;-2;3)$ et $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$
2. $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3$
3. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1$ avec $A(1;-2;3)$
4. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5$ avec $A(-2;4;1)$ et $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

Exercice 13 On considère la figure suivante, dans lequel la droite (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1. En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (MHC).
2. Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

Exercice 14 On considère la figure suivante, dans lequel la droite (GJ) est orthogonale au plan (IHD). En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (IHD).



Exercice 15 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points $A(-1;-1;1)$, $B(1;2;-1)$ et $C(0;1;1)$. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

Exercice 16 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec :

1. $A(5;-4;1)$, $B(6;3;9)$ et $C(-8;1;7)$
2. $A(3;4;5)$, $B(4;-2;7)$ et $C(5;-8;9)$
3. $A(-1;7;4)$, $B(-2;10;5)$ et $C(3;6;-1)$

Intersection d'une droite et d'un plan

Exercice 17 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -7+t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & -5-t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$ et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne : $-2x-3y+z-6=0$. Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

Exercice 18 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite (d) : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1-2s \\ y & = & 2-s \\ z & = & -3+5s \end{array}\right.$, $s\in\mathbb{R}$ et le plan $(\mathscr{P}): -x-5y-z-6=0$.

Exercice 19 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite(d) : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6+t \\ y & = & -1+2t \\ z & = & -3-t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$ et le plan $(\mathscr{P}): x+y+3z-1=0$.

Exercice 20 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite (d) engendrée par $A(6;-2;-3)$ et $\vec{u}=5\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ et le plan $(\mathscr{P}): -5x-7y+10z+6=0$.

Exercice 21 Même instruction qu'à l'exercice précédent avec la droite (d) passant par les points $A(1;2;-1)$ et $B(2;4;1)$ et le plan $(\mathscr{P}) : -\frac{4}{5}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z - 2 = 0$.

Exercice 22 Même raisonnement qu'à l'exercice précédent avec le plan $(\mathscr{P}) : 4x - 6y + 5z - 3 = 0$ et :

1. l'axe des abscisses
2. l'axe des ordonnées
3. l'axe des cotes

Exercice 23 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la droite (d) passant par les points $A(2;-5;3)$ et $B(-2;4;-8)$ et le plan $(\mathscr{P})$ passant par $C(4;-1;2)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 24 *Distance d'un point à un plan*
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère un plan $(\mathscr{P})$ et un point A.
Soit M un point appartenant à $(\mathscr{P})$. Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[AM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

1. Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.
   - **a.** Faire un schéma.
   - **b.** De quelle droite et de quel plan le point H est-il l'intersection ?
   - **c.** Démontrer que si M est un point de $(\mathscr{P})$ différent de H, alors $AM > AH$.
     La distance de A à $(\mathscr{P})$ est donc la distance AH.
2. Soit $(\mathscr{P}) : x - 2y - 2z - 31 = 0$ et $A(2;1;-2)$.
   - **a.** Donner un vecteur directeur de (AH).
   - **b.** En déduire les coordonnées du point H puis la distance de A à (P).

Intersection de deux plans

Exercice 25 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Exercice 26 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + 4 = 0.$$

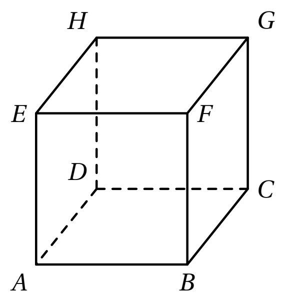
Exercice 27 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -2x + 2y + 4z + 4 = 0.$$

Exercice 28 Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$3x + 9y - 6z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

Exercice 29 Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.
Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on considère les points $M\left(1;1;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ et $P\left(1;0;-\frac{5}{4}\right)$.



1. **a.** Reproduire la figure et placer les point M, N et P.
   b. Démontrer que ces points ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en M.
3. **a.** Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$, normal au plan (MNP).
   b. En déduire une équation cartésienne de ce plan.
   c. Soit (Δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Donner une équation paramétrique de (Δ).
   d. Soit K le point d'intersection de (MNP) et (Δ). Démontrer que $K\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.
   e. En déduire le volume du tétraèdre $FMNP$.

Projection orthogonale

Exercice 30 Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$.

1. $M(7;-2;6)$ et $\mathscr{P}: -x+y+3z+2=0$
2. $M(5;2;-3)$ et $\mathscr{P}: x+2y-z+3=0$
3. $M(-1;-2;-1)$ et $\mathscr{P}: x+y+2z-2=0$

Exercice 31 On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=-t \\ z=2t-2 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point M sur la droite d.

1. $M(2;2;-2)$
2. $M(1;1;1)$
3. $M(2;4;2)$
4. $M(0;1;0)$

Exercice 32 On considère la droite δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=-t \\ z=2t-2 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, donner la distance entre le point M et la droite δ.

1. $M(-1;0;1)$
2. $M(-1;0;7)$
3. $M(3,8;1,1;5,5)$
4. $M(-25;-7;10)$

Exercice 33 Donner la distance entre le point M et le plan $\mathscr{P}$

1. $M(3;4;1)$ et $\mathscr{P}: 2x+-2y+z+4=0$
2. $M(4;\sqrt{5};4)$ et $\mathscr{P}: -4x+\sqrt{5}y+2z+13=0$
3. $M(1;1;1)$ et $\mathscr{P}: x+y+z=0$

Exercice 34 Dans le cube $ABCDEFGH$, on considère le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. On note K le contre du carré $ABFE$.

1. Justifier que le plan (ACE) admet pour equation $x-y=0$.
2. Calculer les coordonnées de H le projeté orthogonal du point K sur le plan (ACE)

Exercice 35 Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c, et d sont des réels, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point quelconque de l'espace.
On considère un point $M(x;y;z)$ appartenant au plan $\mathscr{P}$ et on note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

1. Justifier que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$.
2. En utilisant la formule du cosinus, exprimer $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$.
3. Que peut-on dire de l'angle $\left(\overrightarrow{AH},\vec{n}\right)$?
4. En déduire que $\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right| = AH\times\|\vec{n}\|$.
5. En remarquant que $d=-ax-by-cz$, simplifier l'expression analytique de$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$.
6. En déduire une expression de la distance de A à $\mathscr{P}$.

Exercice 36 On considère les points $R(1;0;0)$, $I(0;1;0)$, $E(0;0;1)$ et $N(1;1;1)$.

1. Justifier que $x+y+z-1=0$ est une équation du plan (RIE).
2. Déterminer les coordonnées de J, projeté orthogonal du point N sur le plan (RIE).
3. Montrer que J est le centre de gravité de RIE.

Exercice 37 On considère les points $F(0;-1;1)$, $G(2;-1;3)$ et $H(4;-5;3)$ et un plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+2z+3=0$.

1. Déterminer les coordonnées de P, Q et R, projeté orthogonaux respectifs des points F, G et H sur le plan $\mathscr{P}$.
2. Calculer $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$.
3. Peut-on dire que la projection orthogonale conserve les angles ? Justifier.

Exercice 38 Soient $E(-2,5;0,5;-1)$, $D(3;4;3)$ et $F(2;-1;5)$ trois points de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix}-9\\5\\8\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$.
2. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (EDF).
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de E sur la droite (DF).
4. En déduire l'aire du triangle EDF.