Récurrence - Limite de suites 1

Démonstration par récurrence

Exercice 1

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$
2. On prend un cube et on place en dessous de lui trois cubes; on place ensuite cinq cubes en dessous de ces trois cubes, etc.
   Combien utilise-t-on de cubes si l'on a dressé 100 rangées de cubes?

Exercice 2 Démontrer par récurrence pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$1+(2\times 2!)+(3\times 3!)+\cdots+(n\times n!)=(n+1)!-1$$

Exercice 3 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad n! \geqslant 2^{n-1}$

Exercice 4 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n-3$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n=3-2^{n+1}$.

Limites de suites

Exercice 5 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n=2n^2+3n-3$
2. $u_n=n^2-n+1$
3. $u_n=\dfrac{2}{n+2}$
4. $u_n=\dfrac{3n^2+2}{n+3}$
5. $u_n=\dfrac{4n-2}{n+8}$
6. $u_n=\left(n^2-7n+2\right)\left(5n+\sqrt{n}\right)$
7. $u_n=2+\dfrac{(-1)^n}{n}$
8. $u_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$
9. $u_n=-\sqrt{n^3+7}$
10. $u_n=\dfrac{\cos n}{n^2}$
11. $u_n=\dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$
12. $u_n=\dfrac{1}{n}\left(2-3n+8n^2\right)$

Exercice 6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n^2+1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant 2^n$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7

1. Déterminer la limite de la suite (S_n) définie pour tout entier $n\geqslant 1$ par $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.
2. Déterminer la limite de la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

Exercice 8 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par $u_n=\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^3}$.

1. Démontrer que pour tout $n\geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n^3}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n^3}$
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 9 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n=\sqrt{5n+2}$.

1. Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre?
2. Coder l'algorithme dans le langage de la calculatrice, puis l'exécuter en saisissant en entrée $A=20$, puis $A=50$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (u_n)?
4. Démontrer, à l'aide de la définition, cette conjecture.

```
from math import *
A=eval(input('Saisir la valeur de A'))
N=0
U=sqrt(2)
while U<=A:
    U=sqrt(5*N+2)
    N=N+1
print(N)
```

Exercice 10 On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :

   a. la suite (w_n) tend vers $-\infty$ b. la suite (u_n) tend vers $-\infty$ c. la suite (w_n) n'a pas de limite

2. Si $w_n = 2u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $(\ell > 0)$, alors :

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ b. On ne peut rien dire sur la limite de (v_n) c. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $w_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, alors :

   a. On ne peut rien dire sur la convergence de la suite (v_n) b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$ c. la suite (v_n) n'a pas de limite

4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$, alors :

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

Exercice 11 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n).

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.
2. Si (u_n) converge vers un nombre réel ℓ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.
3. Si (u_n) est une suite strictement positive et si (u_n) converge vers un nombre réel ℓ, alors $\ell > 0$.
4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, alors la suite (w_n) converge.

Exercice 12

1. Restitution organisée des connaissances
   Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
   Démontrer le théorème de comparaison suivant :

   Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
   (1) à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$
   (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
   alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$

   a. Vérifier que : $u_1 = -0,5$ et $u_2 = -0,25$

   b. Calculer u_3.

   c. On admet que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 0$.
   En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n-2$.

   d. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 13 *À l'hôtel de Hilbert* L'hôtel de Hilbert possède une petite spécificité : il possède une infinité de chambres. Aujourd'hui, bonne nouvelle, il est complet pour toute la semaine à venir !

Le réceptionniste de l'hôtel reçoit un appel d'un groupe souhaitant réserver des chambres pour demain. Contre toute attente, il prend leur réservation, sort de derrière son comptoir et écrit le message suivant sur le panneau d'information de l'hôtel :

> Chères clientes, chers clients, à compter de demain, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les occupants de la chambre n seront déplacés en chambre $n + 10$. Veuillez nous excuser pour la gêne occasionnée.

1. a. Dans quelle chambre seront déplacés les occupants de la chambre 1 ? De la chambre 5 ?

   b. De combien de personnes est composé le groupe ayant réservé aujourd'hui ?

2. Quel message aurait pu écrire le réceptionniste si le groupe avait compté 1000 personnes ? Une infinité de personnes ?