Somme de variables aléatoires

Somme de variables aléatoires

Exercice 1 Lors d'une soirée au casino, Hervé décide de tester différents jeux : une fois la roulette et deux fois les machines à sous. Il note X la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

1. Pour faciliter l'étude, il écrit $X = X_1 + X_2 + X_3$. A quoi les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 peuvent-elles correspondre ?
2. Cédric souhaite écrire X sous la forme $X = X_1 + 2X_2$. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 2 On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un univers Ω dont on donne les lois de probabilités ci dessous.

x_i	-4	1	20
$P(X = x_i)$	0,1	0,35	0,55

y_i	-2	5
$P(Y = y_i)$	0,27	0,73

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Z ?
2. Peut-on déterminer la loi de probabilité de Z à partir des données de l'énoncé ? Si oui, donner cette loi.

Exercice 3 On lance un dé cubique équilibré et on joue au jeu suivant : le nombre de points récoltés est le triple du résultat de ce dé. On joue deux fois à ce jeu et on note X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant aux points respectivement obtenus au premier et au deuxième lancer.

1. Calculer $X_1((3;4))$, $X_2((1;6))$ et $X_1((4;2))$.
2. Soit X la varaible aléatoire définie par $X = X_1 + X_2$.
   a. Que représente la variable aléatoire X dans le contexte de l'exercice ?
   b. Calculer $X((3;5))$.

Exercice 4 On considère une urne dans laquelle se trouvent différentes boules de couleur : des rouges, des vertes et des noires. On tire avec remise trois boules de l'urne.
A chaque étape, obtenir une boules noires rapporte 5 points, obtenir une boule verte rapporte 2 points et obtenir une boules rouge fait perdre 10 points. On note respectivement R, V et N les événements « Obtenir une boule rouge », « Obtenir une boule verte » et « Obtenir une boule noire » .
On note enfin X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires correspondant respectivement au nombre de points obtenus aux premier, deuxième et troisième tirages.

1. Calculer $X_2((V;R;N))$, $X_1((N;V;V))$ et $X_3((R;N;R))$.
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre moyen de points obtenus par étape à l'issue de la partie.
   a. Exprimer X en fonxtion de X_1, X_2 et X_3 ?
   b. Calculer $X((N;V;V))$.

Espérance et variance

Exercice 5 On considère les variables aléatoires X et Y définies sur Ω dont les lois de probabilité sont données ci dessous. Calculer $E(5X)$, $E(X+Y)$, $E(X-Y)$ et $E(3X-Y)$.

x_i	-7	-4	2	5
$P(X = x_i)$	0,04	0,27	0,36	0,33

y_i	-4	-1	2	4
$P(Y = y_i)$	0,28	0,04	0,54	0,14

Exercice 6 On reprend les variables aléatoires X et Y dont les lois de probabilités sont données dans l'exercice précédent. On suppose par ailleurs que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

1. Calculer $V(5X)$ et $V(X+Y)$
2. En déduire $\sigma(5X)$ et $\sigma(X+Y)$. On arrondira à 10^{-4} près.

Exercice 7 Soient X et Y deux variables aléatoire définies sur un même univers Ω. Compléter le tableau de valeurs suivant.

$E(X)$	$E(Y)$	$E(X+Y)$	$E(2X-3Y)$
	2,2	0,55	
0,12			1,65
		0,23	-1,79

Exercice 8 Soit a un nombre réel. Soient les variables aléatoires X, Y et Z définies sur Ω dont les lois de probabilité sont données ci-dessous. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z sachant que $(E(X+3Y) = E(Z)$.

x_i	-5	2	4	12
$P(X=x_i)$	0,4	0,05	0,25	0,3

y_i	0	3	7
$P(Y=y_i)$	0,3	0,2	0,5

z_i	12	a
$P(Z=z_i)$	0,75	0,25

Exercice 9 Le cinéma de la commune propose différents tarifs : un tarif plein à 12€, un tarif étudiant à 7€ et un tarif enfant (-12 ans) à 5€.
Une étude portant sur la clientèle a montré que 48% des clients paient un plein tarif, 22% des clients bénéficie du tarif enfant et les autres du tarif étudiant. Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12% achètent uniquement un paquet de bonbons à 4€, 23% achètent seulement un paquet de pop-corn taille standard à 5€, 15% achètent uniquement un paquet de pop-corn en grand taille à 7€. Les autres clients ne souhaitent pas payer de confiserie.
On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant au prix payé par ce client pour sa place de cinéma et pour l'éventuelle confiserie supplémentaire.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et de X_2.
2. Soit x la variable aléatoire correspondant au prix total payé par le client.
   a. Exprimer X en fonction de X_1 et de X_2.
   b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 10 A la fin de l'année civile, la géante d'un garage automobile spécialisé s'intéresse au prix payé par ses clients pour les pneus (par deux) et pour les plaquette de frein.
Elle remarque, pour les plaquette de frein, que 12% des clients paient 70€, 47% des clients paient 90€, 40% des clients paient 120€ et 1% des clients paient 160€. Pour les deux pneus, elle établi que 45% des clients paient 100€, 40% des clients paient 150€ et 15% des clients paient 200€.
On note X la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des plaquettes de frein, et Y la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des deux pneus.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y.
2. a. Soit Z_1 la variable aléatoire correspondant au prix payé par un client changeant à la fois deux pneus et ses plaquettes de frein. exprimer la variable Z_1 en fonction de X et de Y.
   b. A quel prix moyen le changement de deux pneus et des plaquettes de frein s'élève-t-il?
3. Certains clients souhaitent changer leurs plaquettes de frein et les quatre pneus, tous identiques. Soit Z_2 la variable aléatoire correspondant au prix alors payé. Exprimer la variable aléatoire Z_2 en fonction de X et Y puis déterminer $E(Z_2)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 11 Soient X et Y deux variables aléatoire indépendantes définies sur Ω. Compléter le tableau de valeurs suivant.

$V(X)$	$V(Y)$	$V(X+Y)$	$V(3X-Y)$
1,4		3	
2,8			39,4
		11,4	53,8

Exercice 12 Lors du bilan de fin d'année, un opticien a établi les résultats suivants quand aux ventes de montures et de verres correctifs réalisées cette année.

Prix monture (en €)	100	200	300
Fréquence (en %)	26	56	18

Prix verre (en €)	20	60	110	220	375
Fréquence (en %)	7	48	22	20	3

On choisit au hasard une facture parmi celles correspondant aux clients ayant acheté une paire de lunettes. On note Z la variable aléatoire correspondant au prix de la paire de lunettes. on suppose que les deux verres ont le même prix.

1. On note X la variable aléatoire correspondant au prix de la monture et Y la variable aléatoire correspondant au prix d'un verre. Justifier l'égalité $Z = X + 2Y$.
2. Déterminer $E(Z)$. interpréter le résultat obtenu.
3. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer $V(Z)$. En déduire une valeur approchée de $\sigma(Z)$ à 10^{-4} près.

Exercice 13 Soient a et b deux réels, et X et Y deux variables aléatoires dont on donne les lois de probabilité.

x_i	-5	2	a	8	10
$P(X=x_i)$	0,06	0,23	0,21	0,37	0,13

y_i	b	-4	-2	5	20
$P(Y=y_i)$	0,01	0,35	0,12	0,22	0,3

On pose T et Z les variables aléatoires définies par $T = Y - Z$ et $Z = 3X + 2Y$.

1. **a.** Exprimer $E(T)$ et $E(Z)$ en fonction de a et b.
   b. On suppose que $E(T) = 0,1$ et $E(Z) = 26,5$. Déterminer les valeurs de a et b
2. **a.** On donne $V(10Z) = 54853,32$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?
   b. On donne $V(T) = 87,058$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?

Exercice 14 Soit r un entier naturel non nul et $\{x_1;\dots;x_r\}$, r réels distincts.
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω à valeurs dans $\{x_1;\dots;x_r\}$ dont on donne la loi de probabilité suivante.

x_i	x_1	...	x_r
$P(X=x_i)$	p_1	...	p_r

1. Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (X - E(X))^2$.
   Exprimer $E(Y)$ en fonction de x_i et p_i et en déduire que $E(Y) = V(X)$.
2. Développer l'expression $(X - E(X))^2$.
3. En utilisant la linéarité de l'espérance, montrer que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Exercice 15 Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois une pièce équilibrée et on noue à un jeu. Pour tout entier $k \in \{1;\dots;n\}$:

- si la pièce tombe sur pile au k^e lancer, on gagne k€.
- sinon , on ne gagne rien.

On note X_k la variable aléatoire correspondant au gain obtenu lors du k^e tirage et, pour tout $\ell \in \{1;\dots;n\}$, Y_ℓ le total des gains obtenus à l'issue du ℓ^e lancer.

1. **Étude de X_k**
   a. Pour tout entier $k \in \{1;\dots;n\}$, déterminer la loi de probabilité de X_k.
   b. En déduire $E(X_k)$.
   c. Montrer que, pour tout $k \in \{1;\dots;n\}$, $V(X_k) = \dfrac{k^2}{4}$
2. **Étude de Y_ℓ**
   a. Exprimer, pour tout entier $\ell \in \{1;\dots;n\}$, Y_ℓ en fonction des variables aléatoires X_k.
   b. Déterminer l'espérance de Y_ℓ, puis le nombres théorique de lancers nécessaires afin que le gain total dépasse 280€.
   c. Montrer par récurrence sur l'entier $m \geqslant 1$ que $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.
   En déduire $V(Y_\ell)$ en fonction de ℓ.

Applications à la loi binomiale

Exercice 16 Soient X et Y deux variables aléatoires suivant les lois binomiales $\mathscr{B}(150;0,6)$ et $\mathscr{B}(400;0,3)$.

1. Quelle est la variables aléatoires pour laquelle la valeur moyenne théorique est la plus forte ? Justifier.
2. Quelle est la variables aléatoire pour laquelle la dispersion autour de la moyenne théorique est la plus faible ? Justifier.

Exercice 17 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \geqslant 1$ et $p \in [0;1]$. On donne $E(X) = 60$ et $V(X) = 48$. Déterminer les valeurs de n et p.

Exercice 18 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,7$. Donner les valeurs exactes de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 19 Un lycée propose un tournoi interclasse de football dans lequel douze équipe s'affrontent. L'équipe A rencontre l'intégralité des autres équipes et, à chaque match, sa probabilité de gagné est de $0,35$. On note X la varaible aléatoire correspondant au nombre de match gagnés par l'équipe A. on admet que x suit une loi binomiale $\mathscr{B}(11;0,35)$. Les résultats seront arrondis au millième si besoin.

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Une victoire rapporte trois points. une défaite ou un match nul rapporte 0 point. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de points remportés par l'équipe A. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 20 Au 1er janvier 2020, le prix du timbres pour une enveloppe de 20g au moins s'élève à 0,95€ pour les timbres gris, 0,97€ pour les timbres verts, 1,16€ pour les timbres rouges et 1,40€ pour les timbres internationaux. On se rend dans un bureau de poste et le directeur d'établissement donne les informations suivantes sur l'affranchissement des lettres de 20g ou moins.

Prix du timbre (en €)	0,95	0,97	1,16	1,40
Fréquence (en %)	12	56	20	12

On prélève 20 enveloppes de 20g ou moins de ce bureau de poste. On supposera que le nombre de lettres est suffisamment important pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise. Pour tout entier $k \in \{1;...;20\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au prix du timbre de la k^e enveloppe choisie et $S_{20} = X_1 + ... + X_{20}$.

1. A quoi la variable aléatoire S_{20} correspond-elle ?
2. En moyenne, à combien le prix des 20 timbres s'élève-t-il ? Justifier.
3. Déterminer la valeur exacte de $\sigma(S_{20})$.

Exercice 21 Un restaurant propose différents choix de menus. 64% des clients choisissent l'entrée à 9€. Les autres choisissent l'entrée à 11€. 76% des clients commandent le plat composé de viande dont le prix s'élève à 19€. Les autres choisissent le plat de poisson coutant 22€.Enfin, 10% des clients mangent une crêpe en dessert à 8€, 38% des clients désirent manger le dessert au chocolat à 6€,30% commandent le dessert aux fruits à 7€ et 22% ne souhaitent pas manger de dessert.
On choisit un client au hasard. On note respectivement X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires correspondant aux prix payés pour l'entrée, pour le plat et le dessert.

1. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
2. On note X la variable aléatoire correspondant au prix total payé par le client.
   Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3.
3. En déduire le prix moyen payé par chaque client. On choisit maintenant 10 clients de ce restaurant. on suppose que le nombre de clients du restaurant soit suffisamment grand pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise. En moyenne, sur ces dix clients, à combien le prix total s'élève-t-il ?

Échantillon de variables aléatoires

Exercice 22 On considère dix variables aléatoires $X_1;...;X_{10}$ définies sur un même univers Ω. On suppose que les variables aléatoires $X_1;...;X_{10}$ ont même loi de probabilité et sont indépendantes. On donne ci-dessous la loi de probabilité de X_7.

x_i	-5	0	1	3
$P(X_7 = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

On pose S_{10} et m_{10} les variables aléatoires définies par
$S_{10} = X_1 + ... + X_{10}$ et $M_{10} = \dfrac{X_1 + ... + X_{10}}{10}$

1. Calculer $E(S_{10})$.
2. Calculer la valeur de $V(S_{10})$ puis en déduire $\sigma(S_{10})$. On arrondira la valeur de $\sigma(S_{10})$ au centième.
3. Calculer $E(M_{10})$.
4. Calculer la valeur de $V(M_{10})$ puis en déduire $\sigma(M_{10})$. On arrondira la valeur de $\sigma(S_{10})$ au centième.

Exercice 23 Soit n un entier naturel non nul et $X_1;...;X_{10}$, n variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes, dont on donne, $\forall k \in \{1;...;n\}$, la loi de probabilité suivie.

x_i	4	10	12
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

On pose S_{10} la variable aléatoire définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle $E(S_n) \geqslant 2455$?